



ชุดฝึกทักษะระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์

สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนวิทย์-คณิต
รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 รหัสวิชา ค 31202



เรื่อง อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์



นางนภวรรณ บัญชานนท์
ตำแหน่งครู วิทยฐานะ ครูชำนาญการ

โรงเรียนอ้อมน้อยโสภณชนูปถัมภ์
อำเภอกระทุ่มแบน จังหวัดสมุทรสาคร
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 10

คำชี้แจงในการใช้ชุดฝึกทักษะ

1. ชุดฝึกทักษะระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนรู้ – คณิต เรื่อง อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ ใช้ประกอบการเรียนการสอนในรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 รหัสวิชา ค 31202
2. ให้นักเรียนศึกษาสาระการเรียนรู้และจุดประสงค์การเรียนรู้
3. นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน จำนวน 10 ข้อ
4. ให้นักเรียนฟังคำอธิบายจากครูผู้สอนในช่วง 3 ชั่วโมง หรือศึกษาเนื้อหาความรู้ และตัวอย่างจากชุดฝึกทักษะให้เข้าใจ หากมีปัญหาหรือข้อสงสัยให้ปรึกษาครูผู้สอนทันที
5. ในการศึกษาและทำแบบฝึกหัด ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดด้วยตนเอง เรียงลำดับขั้นตอน ไม่เปิดข้ามหน้าใดหน้าหนึ่งโดยเด็ดขาด
6. เมื่อทำเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนนำแบบฝึกหัดส่งให้ครูตรวจ
7. นักเรียนต้องตั้งใจ มีระเบียบวินัย มีความซื่อสัตย์ และมีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย ทำให้เสร็จเรียบร้อยภายในเวลาที่กำหนด
8. เมื่อทำแบบฝึกหัดครบทุกชุดแล้ว ทำแบบทดสอบหลังเรียนจำนวน 10 ข้อ
9. ในการเรียนรู้ด้วยชุดฝึกทักษะระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แผนการเรียนรู้ – คณิต เรื่อง อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ นักเรียนมีเวลา 3 ชั่วโมง



บทบาทของครู

1. ครูควรเตรียมชุดฝึกทักษะให้พร้อมและครบตามจำนวนนักเรียน
2. แจกชุดฝึกทักษะให้นักเรียนศึกษาพร้อมกับแนะนำวิธีการใช้ชุดฝึกทักษะ เพื่อนักเรียนจะได้ปฏิบัติได้อย่างถูกต้อง
3. แจ้งสาระการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ และวิธีการประเมินผลให้นักเรียนทราบ
4. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน
5. ดำเนินการสอนตามกิจกรรมการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ ตามแผนการจัดการเรียนรู้
6. เมื่อทำเสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนนำแบบฝึกหัดส่งให้ครูตรวจ
7. นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน เพื่อประเมินความก้าวหน้าของนักเรียนหลังจากที่เรียนจบแล้ว
8. หากนักเรียนคนใดทำแบบทดสอบหลังเรียนได้คะแนนไม่ผ่านเกณฑ์ที่กำหนดไว้ ควรจัดสอนซ่อมเสริมให้นักเรียนศึกษาชุดฝึกทักษะใหม่อีกครั้ง
9. นักเรียนต้องทำแบบทดสอบหลังเรียน เพื่อประเมินการเรียนรู้การสอนเมื่อเรียนจบให้ผ่านเกณฑ์ประเมินตามที่กำหนด
10. ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ครูต้องประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์ของนักเรียน นักเรียนต้องได้ระดับคุณภาพผ่านเกณฑ์ตามที่กำหนด

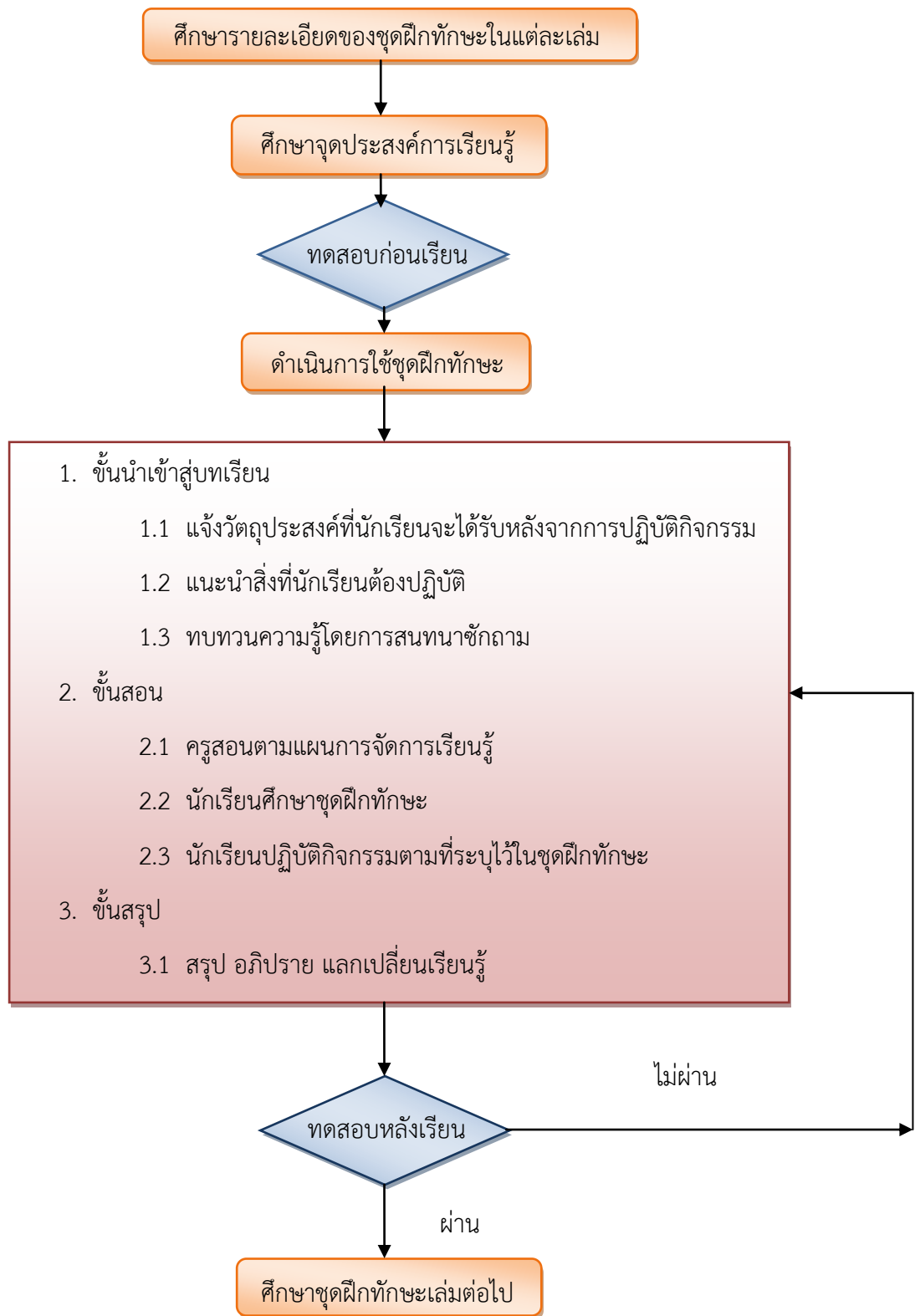


บทบาทของนักเรียน

1. ศึกษาสาระการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้และเกณฑ์การวัดผลประเมินผล
2. นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน
3. ศึกษาเนื้อหาจากชุดฝึกทักษะ และตัวอย่างจากชุดฝึกทักษะให้เข้าใจ
4. ในการทำแบบฝึกหัด ให้นักเรียนทำลงในแบบฝึกหัดด้วยตนเอง เรียงลำดับขั้นตอน
ไม่เปิดข้ามหน้าใดหน้าหนึ่งโดยเด็ดขาด
5. เมื่อทำเสร็จแล้ว ให้นักเรียนนำแบบฝึกหัดที่ทำเสร็จเรียบร้อยแล้วในแต่ละหัวข้อ ส่งให้ครูตรวจ
6. นักเรียนควรตั้งใจ มีระเบียบวินัย มีความซื่อสัตย์ และมีความรับผิดชอบต่องานที่ได้รับมอบหมาย
ทำให้เสร็จเรียบร้อยภายในเวลาที่กำหนด หากสงสัยหรือมีปัญหาให้แจ้งครูผู้สอนทันที
7. นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน เพื่อประเมินความก้าวหน้าของนักเรียนหลังจากที่เรียนจบแล้ว
และต้องผ่านเกณฑ์ประเมินตามที่กำหนด
8. นักเรียนได้รับการประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์รายวิชา และต้องผ่านเกณฑ์ประเมินตามที่กำหนด



แผนผังขั้นตอนการใช้ชุดฝึกทักษะ



สาระการเรียนรู้ / จุดประสงค์การเรียนรู้

สาระการเรียนรู้

อินเวอร์สการคูณ หรือตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์มิติ 2×2 ได้
2. นักเรียนสามารถหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์มิติ $n \times n$ เมื่อ $n \geq 2$ ได้



แบบทดสอบก่อนเรียน

คำชี้แจง

ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด แล้วทำเครื่องหมาย × ลงในกระดาษคำตอบ

(ข้อละ 1 คะแนน) ใช้เวลา 15 นาที

1. ข้อใดเป็นอินเวอร์สการคูณของ $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

ก. $-\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

ข. $-\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

ค. $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

ง. $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์ในข้อใด

ก. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

3. ถ้า $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ แล้ว เมทริกซ์ B ตรงกับข้อใด

ก. $-\frac{1}{17} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

ข. $-\frac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

ค. $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

ง. $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

4. เมทริกซ์ในข้อใด ไม่สามารถหาอินเวอร์สการคูณได้

ก. $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

5. ถ้า $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว $C_{13}(A)$ ตรงกับข้อใด

- ก. -1 ข. 3 ค. 2 ง. 1

ข้อมูลต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 6 - 10 กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. $\det A$ ตรงกับข้อใด

- ก. 2 ข. 1 ค. -1 ง. -2

7. โคแฟกเตอร์เมทริกซ์ของ A ตรงกับข้อใด

ก. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

8. $\text{adj}(A)$ ตรงกับข้อใด

ก. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

9. $A \text{ adj}(A)$ ตรงกับข้อใด

ก.
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ข.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ค.
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ง.
$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

10. A^{-1} ตรงกับข้อใด

ก.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ข.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ค.
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

ง.
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$



7. อินเวอร์ส (Inverse) การคูณ หรือตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์

ถ้า A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ จะได้ว่า $AI_n = A = I_n A$ ดังนั้น I_n เป็นเอกลักษณ์การคูณในเซตของ $n \times n$ เมทริกซ์

บทนิยาม

ให้ A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ ถ้า B เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ที่มีสมบัติว่า $AB = BA = I_n$ แล้วจะเรียก B ว่าเป็นอินเวอร์สการคูณ หรือตัวผกผันการคูณของ A และเขียนแทน B ด้วย A^{-1}

ตัวอย่างที่ 7.1 จงแสดงว่าเมทริกซ์ $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } AB &= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 + (-9) & (-15) + 15 \\ 6 + (-6) & (-9) + 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } BA &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 + (-9) & 6 + (-6) \\ (-15) + 15 & (-9) + 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $AB = BA = I_2$

สรุปได้ว่า เมทริกซ์ B เป็นอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ A



ในเซต $R - \{0\}$ จะได้ว่า สมาชิกทุกตัวมีอินเวอร์สการคูณ นั่นคือ จำนวนจริงทุกจำนวนที่ไม่เท่ากับ 0 มีตัวอินเวอร์สการคูณ แต่ในเรื่องของเมทริกซ์นั้นอาจมีเมทริกซ์ที่ไม่เท่ากับ 0 และไม่มีอินเวอร์สการคูณก็ได้

การหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

7.1 เมื่อ A เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2



บทนิยาม

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ โดยที่ $ad - bc \neq 0$ แล้ว A จะมีอินเวอร์สการคูณ

และ $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

จากบทนิยามจะเห็นว่า ค่าของ $ad - bc$ ของเมทริกซ์ A คือ $\det(A)$ นั่นเอง

ดังนั้น $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ เมื่อ $\det(A) \neq 0$

ตัวอย่างที่ 7.2 จงหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ที่กำหนดไว้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \det(A) &= 10 - 5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

ดังนั้น $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$2. \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \det(B) &= (-8) - (-6) \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } B^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$3. \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \det(C) &= 4 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\det(C) = 0$ ดังนั้นเมทริกซ์ C ไม่มีอินเวอร์สการคูณ

บทนิยาม

ให้ A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์

A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix) เมื่อ $\det(A) = 0$

A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (non-singular matrix) เมื่อ $\det(A) \neq 0$



จากตัวอย่าง 7.2 จะเห็นว่า เมทริกซ์ A และ B เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ส่วนเมทริกซ์ C เป็นเมทริกซ์เอกฐาน



แบบฝึกหัดที่ 7.1



จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์มิติ

2X2 ได้

คำชี้แจง

จงหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

ตอบ $\det(A) = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $A^{-1} = \dots\dots\dots$

2. $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

ตอบ $\det(B) = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $B^{-1} = \dots\dots\dots$

3. $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

ตอบ $\det(C) = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $C^{-1} = \dots\dots\dots$

$$4. \quad D = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ตอบ $\det(D) = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $D^{-1} = \dots\dots\dots$

$$5. \quad E = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

ตอบ $\det(E) = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $E^{-1} = \dots\dots\dots$

$$6. \quad F = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

ตอบ $\det(F) = \dots\dots\dots$

ดังนั้น $F^{-1} = \dots\dots\dots$



7.2 เมื่อ A เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$ เมื่อ $n \geq 2$

บทนิยาม

กำหนด $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ โดยที่ $n \geq 2$ และ $C_{ij}(A)$ แทนโคแฟกเตอร์ของ a_{ij} ของเมทริกซ์ A โคแฟกเตอร์เมทริกซ์ของ A คือ $C = [c_{ij}(A)]$

บทนิยาม

กำหนด $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ โดยที่ $n \geq 2$ เมทริกซ์ผกผัน (adjoint matrix) ของ A คือ ทรานสโพสของโคแฟกเตอร์เมทริกซ์ของ A เขียนแทนด้วย $\text{adj}(A)$ นั่นคือ $\text{adj}(A) = [c_{ji}(A)]^t$

ตัวอย่างที่ 7.3 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(A)$, $\text{adj}(A)$, $A \text{adj}(A)$, $\text{adj}(A) A$

และ $\det(A)I_3$

วิธีทำ

1. หา $\det(A)$ นำหลักที่ 1 และ 2 ของ A มาเขียนต่อหลักที่ 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1 -3 0

1 -3 0

$$\begin{aligned} \det(A) &= [1 + (-3)] - [2 + 6] \\ &= (-2) - 8 \\ &= -10 \end{aligned}$$

2. หา adj (A)

$$\begin{aligned}
 C_{11}(A) &= (-1)^{1+1} M_{11}(A) \\
 &= (1) \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= 1 - 6 \\
 &= -5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{12}(A) &= (-1)^{1+2} M_{12}(A) \\
 &= (-1) \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= (-1)[0 - (-3)] \\
 &= -3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{13}(A) &= (-1)^{1+3} M_{13}(A) \\
 &= (1) \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\
 &= 0 - (-1) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{21}(A) &= (-1)^{2+1} M_{21}(A) \\
 &= (-1) \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= (-1)[1 - (-4)] \\
 &= -5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{22}(A) &= (-1)^{2+2} M_{22}(A) \\
 &= (1) \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= 1 - 2 \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{23}(A) &= (-1)^{2+3} M_{23}(A) \\
 &= (-1) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\
 &= (-1)[2 - (-1)] \\
 &= -3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{31}(A) &= (-1)^{3+1} M_{31}(A) \\
 &= (1) \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= 3 - (-2) \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{32}(A) &= (-1)^{3+2} M_{32}(A) \\
 &= (-1) \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= (-1)[3 - 0] \\
 &= -3
 \end{aligned}$$



$$C_{33}(A) = (-1)^{3+3} M_{33}(A)$$

$$= (1) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -5 & -1 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -5 & 5 \\ -3 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

3. $A \text{adj}(A)$



$$A \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -5 & 5 \\ -3 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

4. $\text{adj}(A) A$

$$\text{adj}(A) A = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 5 \\ -3 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

5. $\det(A)I_3$

$$\begin{aligned}\det(A)I_3 &= -10 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}\end{aligned}$$



จากตัวอย่าง 7.3 จะเห็นว่า $A \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) A = \det(A)I_3$ และ ถ้า A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ แล้ว $A \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) A = \det(A)I_n$ ยังคงเป็นจริงตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท

ให้ A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ $n \geq 2$ จะได้ว่า

1. $A \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) A = \det(A)I_n$
2. A มีอินเวอร์สการคูณ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ในกรณี $\det(A) \neq 0$ จะได้ว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

จากทฤษฎีบทด้านบน สามารถสรุปวิธีการหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ A มิติ $n \times n$ เมื่อ $n \geq 2$ ได้ดังนี้

1. หา $\det(A)$
2. หาโคแฟกเตอร์เมทริกซ์ของเมทริกซ์ A
3. หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ A
4. หา A^{-1} ของ A ได้จาก $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$; $\det(A) \neq 0$

ตัวอย่างที่ 7.4 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

วิธีทำ

1. หา $\det(A)$ นำหลักที่ 1 และ 2 ของ A มาเขียนต่อหลักที่ 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

0 -1 0

0 -3 10

$$\begin{aligned} \det(A) &= [(-3) + 10] - (-1) \\ &= 8 \end{aligned}$$

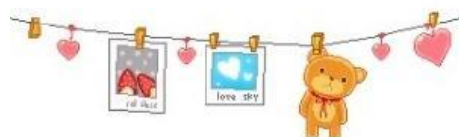
2. หา $\text{adj}(A)$

$$\begin{aligned} C_{11}(A) &= (-1)^{1+1} M_{11}(A) \\ &= (1) \det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0 - (-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{12}(A) &= (-1)^{1+2} M_{12}(A) \\ &= (-1) \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (-1)[0 - (-1)] \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{13}(A) &= (-1)^{1+3} M_{13}(A) \\ &= (1) \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 2 - 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{21}(A) &= (-1)^{2+1} M_{21}(A) \\ &= (-1) \det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (-1)[0 - 5] \\ &= 5 \end{aligned}$$



$ \begin{aligned} C_{22}(A) &= (-1)^{2+2} M_{22}(A) \\ &= (1) \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0 - 5 \\ &= -5 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} C_{23}(A) &= (-1)^{2+3} M_{23}(A) \\ &= (-1) \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (-1)[1 - 3] \\ &= 2 \end{aligned} $
$ \begin{aligned} C_{31}(A) &= (-1)^{3+1} M_{31}(A) \\ &= (1) \det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= (-3) - 0 \\ &= -3 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} C_{32}(A) &= (-1)^{3+2} M_{32}(A) \\ &= (-1) \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= (-1)[(-1) - 10] \\ &= 11 \end{aligned} $
$ \begin{aligned} C_{33}(A) &= (-1)^{3+3} M_{33}(A) \\ &= (1) \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0 - 6 \\ &= -6 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} \text{adj}(A) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 2 \\ -3 & 11 & -6 \end{bmatrix}^t \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -1 & -5 & 11 \\ 2 & 2 & -6 \end{bmatrix} \end{aligned} $

3. หา A^{-1}

ดังนั้น $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$

$$= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -1 & -5 & 11 \\ 2 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$



แบบฝึกหัดที่ 7.2



จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์มิติ $n \times n$ เมื่อ $n \geq 2$ ได้

คำชี้แจง

จงหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

2.

[illegible]

3.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

แบบทดสอบหลังเรียน

คำชี้แจง

ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด แล้วทำเครื่องหมาย × ลงในกระดาษคำตอบ

(ข้อละ 1 คะแนน) ใช้เวลา 15 นาที

1. ข้อใดเป็นอินเวอร์สการคูณของ $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

ก. $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

ข. $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

ค. $-\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

ง. $-\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

2. $\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์ในข้อใด

ก. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

3. ถ้า $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ แล้ว เมทริกซ์ B ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

ข. $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

ค. $-\frac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

ง. $-\frac{1}{17} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

4. เมทริกซ์ในข้อใด ไม่สามารถหาอินเวอร์สการคูณได้

ก. $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$

5. ถ้า $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว $C_{13}(A)$ ตรงกับข้อใด

- ก. 1 ข. 2 ค. 3 ง. -1

ข้อมูลต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 6 - 10 กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. $\det A$ ตรงกับข้อใด

- ก. -2 ข. -1 ค. 1 ง. 2

7. โคแฟกเตอร์เมทริกซ์ของ A ตรงกับข้อใด

ก. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

8. $\text{adj}(A)$ ตรงกับข้อใด

ก. $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

9. $A \text{ adj}(A)$ ตรงกับข้อใด

ก.
$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ข.
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ค.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ง.
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

10. A^{-1} ตรงกับข้อใด

ก.
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ข.
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

ค.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ง.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$



เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

1.	ค	6.	ค
2.	ข	7.	ง
3.	ง	8.	ก
4.	ก	9.	ค
5.	ง	10.	ข

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

1.	ข	6.	ข
2.	ค	7.	ก
3.	ก	8.	ง
4.	ง	9.	ข
5.	ก	10.	ค

เอกสารอ้างอิง

กนกวลี อุษณกรกุลและรณชัย มาเจริญทรัพย์. แบบฝึกหัดและประเมินผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เพิ่มเติม 2 ม.4 เล่ม 2. กรุงเทพฯ : เดอะบุคส์, 2547.

ณรงค์ ปั่นน้อมและคณะ, คู่มือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ ม.4-5-6. กรุงเทพฯ : ภูมิบัณฑิต, ม.ป.ป.

ธนวัฒน์(สันติ) สันทราพรพล. แบบฝึกทักษะและวิธีคิดเร็ว คณิตศาสตร์เพิ่มเติมเล่ม 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6. กรุงเทพฯ : ธรรมบัณฑิต, ม.ป.ป.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 2

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว , 2552.