

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5



วิทยฐานะ ครูชำนาญการ

กรมส่งเสริมการปกครองท้องถิ่น กระทรวงมหาดไทย



คำนำ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง การสร้างจำนวนเชิงซ้อน จัดทำขึ้นเพื่อประกอบการจัดการเรียนการสอนรายวิชา ค32202 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยจัดการให้นักเรียนเป็นคนช่างสังเกต รู้จักคิด ไตร่ตรองด้วยเหตุผล สามารถสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเอง ส่วนรูปแบบ การเรียนรู้แบบนิรนัยพัฒนาให้นักเรียน มีความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับกฎ ทฤษฎี หลักเกณฑ์ ข้อเท็จจริงหรือข้อสรุปอย่างแม่นยำ สามารถนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ ทำให้นักเรียนมีความเข้าใจใน เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน มากขึ้น เกิดทักษะในการคำนวณ กระตุ้นให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ ตระหนักและเห็นคุณค่าของการเรียน อันจะนำไปสู่การบรรลุผลการเรียนรู้ที่คาดหวังของหลักสูตรคณิตศาสตร์ ผู้จัดทำ หวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ การศึกษาค้นคว้าหาความรู้ของนักเรียนและบุคคลที่สนใจเป็นอย่างดี

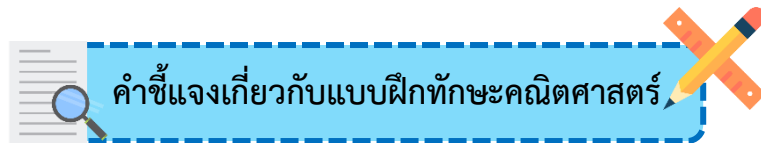
ทัศนีย์ พิมพ์สมาน





เรื่อง	หน้า
คำชี้แจงเกี่ยวกับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์	1
คำชี้แจงสำหรับครู	2
คำชี้แจงสำหรับนักเรียน	3
ขั้นตอนการเรียนรู้โดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์	4
การจัดชั้นเรียน	5
คำอธิบายรายวิชา	6
โครงสร้างรายวิชา	7
ใบความรู้ที่ 1 การสร้างจำนวนเชิงซ้อน	8
ใบกิจกรรมที่ 1	13
ใบกิจกรรมที่ 1	14
แบบฝึกทักษะชุดที่ 1	15
เฉลยใบกิจกรรมและแบบฝึกทักษะ	17
แบบทดสอบย่อยท้ายแผนการจัดการเรียนรู้ ชุดที่ 1	22
เฉลยแบบทดสอบย่อยท้ายแผนการจัดการเรียนรู้ ชุดที่ 1	25





คำชี้แจงเกี่ยวกับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

1. เอกสารฉบับนี้เป็นแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ รายวิชา ค32202 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่องจำนวนเชิงซ้อน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เป็นรูปแบบการเรียนรู้ที่จะช่วยพัฒนานักเรียนให้ เป็นคนช่างสังเกต รู้จักคิด ไตร่ตรองด้วยเหตุผลและรู้หลักการ สูตร หรือกฎเกณฑ์ ได้อย่าง แม่นยำ สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาคณิตศาสตร์ได้ แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่องลำดับ อนันต์และอนุกรมอนันต์ มีทั้งหมด 6 เล่ม ดังนี้ ชุดที่ 1 การสร้างจำนวนเชิงซ้อน ชุดที่ 2 สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน ชุดที่ 3 กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน ชุดที่ 4 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว ชุดที่ 5 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน ชุดที่ 6 รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน และสมการพหุนาม

2. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ฉบับนี้เป็นชุดที่ 1 การสร้างจำนวนเชิงซ้อน ใช้ควบคู่กับการจัดการเรียนการสอน ประกอบด้วย

2.1 คำชี้แจง

- 2.1.1 คำชี้แจงเกี่ยวกับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
- 2.1.2 คำชี้แจงสำหรับครู
- 2.1.3 คำชี้แจงสำหรับนักเรียน
- 2.1.4 ขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะ
- 2.1.5 การจัดชั้นเรียน
- 2.1.6 การประเมินผลการเรียนรู้

2.2 คำอธิบายรายวิชา

2.3 หน่วยการเรียนรู้

2.4 สื่อประกอบชุดกิจกรรม

- 2.4.1 ใบความรู้
- 2.4.2 ใบกิจกรรมและแบบฝึกทักษะ
- 2.4.3 แบบทดสอบหลังเรียน
- 2.4.4 เฉลยในกิจกรรมและแบบฝึกทักษะ

2.5 การวัดและประเมินผล

- 2.5.1 แบบวัดกระบวนการคิดของนักเรียน
- 2.5.2 แบบทดสอบหลังเรียน

3. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ฉบับนี้ ใช้เวลาเรียน 3 ชั่วโมง





คำชี้แจงสำหรับครู

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ รายวิชา ค32202 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่องจำนวนเชิงซ้อน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ครูผู้สอนเป็นผู้ที่มีบทบาทสำคัญที่จะช่วยให้การดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนบรรลุตามวัตถุประสงค์ ครูผู้สอนจึงควร ศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับการปฏิบัติตนก่อนที่จะใช้แบบฝึกทักษะ ดังนี้

1. ครูต้องศึกษาแบบฝึกทักษะและอ่านเนื้อหาสาระอย่างละเอียดรอบคอบ พร้อมทั้งทำความเข้าใจกับเนื้อหาทุกเล่มก่อนการใช้งาน
2. ครูตรวจแบบฝึกทักษะให้ครบถ้วนและเพียงพอกับจำนวนนักเรียน
3. ครูเตรียมเครื่องมือวัดผลและประเมินผล เพื่อให้ทราบความก้าวหน้าของนักเรียน
4. ครูชี้แจงให้นักเรียนทราบลำดับขั้นตอนและวิธีสอน โดยใช้แบบฝึกทักษะอย่าง ชัดเจนและประโยชน์ที่ได้รับจากการสอนโดยใช้แบบฝึกทักษะ
5. ครูชี้แจงให้นักเรียนทราบเกี่ยวกับบทบาทของนักเรียน ในการเรียนโดยใช้แบบฝึกทักษะให้เข้าใจ และเน้นย้ำเรื่องความซื่อสัตย์โดยไม่ลอกเพื่อน หรือไม่ดูเฉลยก่อนลงมือทำด้วยตนเอง
6. แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ
7. ดำเนินการสอนตามกิจกรรมที่กำหนดไว้ในแผนการจัดการเรียนรู้
8. ครูสังเกตความตั้งใจของนักเรียน ความสนใจในการเรียน การทำงานของนักเรียน อย่างใกล้ชิด เมื่อมีปัญหาครูจะได้ทำการช่วยเหลือได้ทันที
9. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน เพื่อประเมินความก้าวหน้าของนักเรียน





คำชี้แจงสำหรับนักเรียน

การศึกษาแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ รายวิชา ค32202 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่องจำนวนเชิงซ้อน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 นักเรียนควรปฏิบัติ ตามคำแนะนำ ดังนี้

1. อ่านคำชี้แจงในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ให้เข้าใจ ทำแบบฝึกทักษะลงในแบบฝึกที่ครูแจกให้หรือทำลงในสมุดของนักเรียนก็ได้
2. นักเรียนศึกษาใบความรู้และทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชุดที่ 1 ถ้าทำแบบฝึกทักษะไม่ได้ ให้ศึกษาเนื้อหาใหม่อีกครั้ง หรือปรึกษาครูผู้สอน
3. หลังจากทำแบบฝึกทักษะเสร็จแล้วให้ส่งครูเพื่อตรวจ และบันทึกคะแนนไว้
4. จากนั้นร่วมกันสรุปองค์ความรู้ โดยครูคอยชี้แนะแนวทางและอธิบายเพิ่มเติม
5. นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน เพื่อประเมินความก้าวหน้าของตนเองจากการศึกษาแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชุดที่ 1 จบแล้ว
6. ในการทำแบบฝึกทักษะ แบบทดสอบหลังเรียน ให้นักเรียนพยายาม ทำด้วยความตั้งใจ และมีความซื่อสัตย์ต่อตนเองให้มากที่สุด โดยไม่เปิดดูเฉลยก่อน





ขั้นตอนการเรียนรู้โดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์



1.อ่านคำแนะนำสำหรับนักเรียน



2.ศึกษาแบบฝึกทักษะโดยปฏิบัติตามกิจกรรม

- ศึกษาเนื้อหา
- ทำแบบฝึกทักษะ
- ตรวจสอบแบบฝึกทักษะ



3. ทำแบบทดสอบหลังเรียน



ประเมิน



4.ศึกษาแบบฝึกทักษะชุดต่อไป



ไม่ผ่านเกณฑ์



ผ่านเกณฑ์



การจัดชั้นเรียน

การใช้ชุดการจัดการเรียนรู้ในขณะจัดกิจกรรม นักเรียนจะแบ่งกลุ่มละ 5-6 คน จะมีจำนวนกี่กลุ่มขึ้นอยู่กับจำนวนนักเรียนในแต่ละห้อง เพื่อทำกิจกรรมกลุ่ม การวัดผลการเรียนรู้โดยใช้แบบทดสอบหลังเรียน

แผนผังการจัดชั้นเรียน

กระดานดำ

โต๊ะครู

กลุ่มที่ 1

กลุ่มที่ 2

กลุ่มที่ 3

กลุ่มที่ 4

กลุ่มที่ 5

กลุ่มที่ 6

การประเมินผลการเรียนรู้

- ประเมินผลจากการปฏิบัติงานกลุ่ม
- ประเมินผลด้านความรู้ ทักษะกระบวนการคิด จากผลงานนักเรียน

คำอธิบายรายวิชากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์สาระเพิ่มเติม
รายวิชา ค32202 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 2
จำนวน 1.5 หน่วยกิต จำนวน เวลาเรียน 60 ชั่วโมง



ศึกษา ฝึกทักษะ/กระบวนการในสาระต่อไปนี้

จำนวนเชิงซ้อน จำนวนเชิงซ้อน กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว และสมการพหุนาม

กราฟเบื้องต้น กราฟ กราฟออยเลอร์ การประยุกต์ของกราฟ

ความน่าจะเป็น กฎเบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ วิธีเรียงสับเปลี่ยน วิธีจัดหมู่ ทฤษฎีบททวินาม ความน่าจะเป็นและกฎสำคัญบางประการของความน่าจะเป็น

โดยจัดประสบการณ์ให้ผู้เรียน ได้ศึกษาฝึกทักษะการคิดคำนวณ และฝึกการแก้โจทย์ปัญหาเพื่อพัฒนาทักษะ/กระบวนการในการคิดคำนวณ การแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อความหมาย ทางคณิตศาสตร์ การนำประสบการณ์ด้านความรู้ความคิด ทักษะ/กระบวนการที่ได้ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่างๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่า และมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระเบียบ รอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ และเชื่อมั่นในตนเอง

วัดผล และประเมินผล โดยวิธีการที่หลากหลายตามสภาพที่เป็นจริง ทั้งเนื้อหา ทักษะ/กระบวนการ และคุณลักษณะที่ต้องการวัดผล ประเมินผล





หน่วยการเรียนรู้

โครงสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ คณิตศาสตร์ศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32202

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แผนการจัดการเรียนรู้ที่	เนื้อหา	จำนวน ชั่วโมง
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1	แนะนำชี้แจงกิจกรรมการเรียนรู้	1
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2	การสร้างจำนวนเชิงซ้อน	3
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3	สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน	3
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4	กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน	3
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5	จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว	3
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6	รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน	3
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7	รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนและสมการพหุนาม	4
รวม		20



ใบความรู้ที่ 1 การสร้างจำนวนเชิงซ้อน (Construction of Complex Numbers)



ความหมายของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม จำนวนเชิงซ้อน คือจำนวนที่เขียนอยู่ในรูป $a + bi$ หรือ (a, b) เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $i^2 = -1$ โดยที่ i คือ $(0, 1)$

จากบทนิยาม จำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ จะเรียก a ว่าส่วนจริง (real part) และ b ว่าส่วนจินตภาพ (imaginary part) ซึ่งจะแสดงลักษณะต่าง ๆ ของจำนวนเชิงซ้อนดังตารางต่อไปนี้

ตารางแสดงลักษณะต่าง ๆ ของจำนวนเชิงซ้อน

ข้อที่	จำนวนเชิงซ้อน ในรูป (a, b)	จำนวนเชิงซ้อน ในรูป $a + bi$	ส่วนจริง	ส่วนจินตภาพ	ลักษณะของ จำนวนเชิงซ้อน
1	$(4, 0)$	$4 + 0i$	4	0	(a, b) หรือ $a + bi$ เมื่อ $b = 0$
2	$(-8, 0)$	$-8 + 0i$	-8	0	
3	$(9, 0)$	$9 + 0i$	9	0	
4	$(2, 7)$	$2 + 7i$	2	7	(a, b) หรือ $a + bi$ เมื่อ $b \neq 0$
5	$(-4, 8)$	$-4 + 8i$	-4	8	
6	$(-3, -5)$	$-3 - 5i$	-3	-5	
7	$(0, 3)$	$0 + 3i$	0	3	$(0, b)$ หรือ $0 + bi$ เมื่อ $b \neq 0$
8	$(0, -7)$	$0 - 7i$	0	-7	
9	$(0, 15)$	$0 + 15i$	0	15	

จากตาราง สามารถสรุปลักษณะต่าง ๆ ของจำนวนเชิงซ้อนได้ ดังนี้

- จำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูป (a, b) หรือ $a + bi$ เมื่อ $b = 0$ เรียกจำนวนเชิงซ้อนนี้ว่า จำนวนจริง a (ดังปรากฏในตารางข้อ 1 – ข้อ 3)
- จำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูป (a, b) หรือ $a + bi$ เมื่อ $b \neq 0$ เรียกจำนวนเชิงซ้อนนี้ว่า จำนวนจินตภาพ (ดังปรากฏในตารางข้อ 4 – ข้อ 6)
- จำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูป $(0, b)$ หรือ $0 + bi$ เมื่อ $b \neq 0$ เรียกจำนวนเชิงซ้อนนี้ว่า จำนวนจินตภาพแท้ (ดังปรากฏในตารางข้อ 7 – ข้อ 9)



2. การเท่ากันและ การบวกของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม ให้ (a, b) และ (c, d) เป็นจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวน จำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูปของคู่อันดับ (a, b) หรือ $a + bi$ และ (c, d) หรือ $c + di$ จะมีการเท่ากันและการบวกของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

การเท่ากัน $(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$ หรือ $a + bi = c + di$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

การบวก $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ หรือ $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

สรุป

1. การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนจะเท่ากันเมื่อ ส่วนจริงเท่ากับส่วนจริง และส่วนจินตภาพเท่ากับส่วนจินตภาพ

$$\begin{array}{ccc} \text{ส่วนจริงเท่ากัน} & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ 2 + 3i & = & 2 + 3i \\ \uparrow & & \uparrow \\ & \text{ส่วนจินตภาพเท่ากัน} & \end{array}$$

2. การบวกจำนวนเชิงซ้อน สามารถหาได้โดยเอาส่วนจริงบวกส่วนจริงและส่วนจินตภาพบวกกับส่วนจินตภาพ

ตัวอย่างที่ 1

การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

1. กำหนดให้ $z_1 = 2 + 4i$ และ $z_2 = 2 + 4i$ จะได้ $z_1 = z_2$
2. กำหนดให้ $z_1 = 2 + yi$ และ $z_2 = 2 + 28i$ จะได้ $z_1 = z_2$ เมื่อ $y = 28$
3. กำหนดให้ $z_1 = 5 + 3i$ และ $z_2 = 3i + 5$ จะได้ $z_1 = z_2$

การบวกของจำนวนเชิงซ้อน

4. $(2, 3) + (1, 4) = (2 + 1, 3 + 4) = (3, 7)$
5. $(-6, 5) + (8, -2) = (-6 + 8, -2 + 5) = (2, 3)$
6. $(6 + 8i) + (9 + 12i) + (3 - 5i) = (6 + 9 + 3) + (8 + 12 - 5)i = 18 + 15i$



3. การคูณจำนวนเชิงซ้อน

3.1 การคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนจริง

บทนิยาม ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z = a + bi$ และ k เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า $kz = ka + kbi$

จากบทนิยาม หมายความว่า การคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนจริง ทำได้โดยนำจำนวนจริงคูณกับส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน ตามลำดับ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1. $2(3 + 2i)$
2. $-3(4 - 2i)$
3. $5(-4 + 7i)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 1. \quad 2(3 + 2i) &= [(2 \times 3) + (2 \times 2i)] = 6 + 4i \\ 2. \quad -3(4 - 2i) &= [(-3 \times 4) - (-3 \times 2i)] = -12 + 6i \\ 3. \quad 5(-4 + 7i) &= [(5 \times (-4)) + (5 \times 7i)] = -20 + 35i \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $3(6 + 3i) + 4(-2 + 3i) - 4(2 + 5i)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 3(6 + 3i) &= [(3 \times 6) + (3 \times 3i)] = 18 + 9i \\ 4(-2 + 3i) &= [(4 \times (-2)) + (4 \times 3i)] = -8 + 12i \\ 4(2 + 5i) &= [(4 \times 2) + (4 \times 5i)] = 8 + 20i \\ \therefore 3(6 + 3i) + 4(-2 + 3i) - 4(2 + 5i) &= (18 + 9i) + (-8 + 12i) - (8 + 20i) \\ &= (18 - 8 - 8) + (9 + 12 - 20)i \\ &= 2 + i \end{aligned}$$

3.2 การคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนเชิงซ้อน

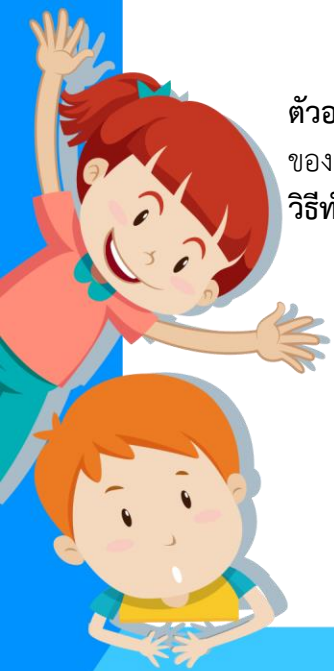
บทนิยาม ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$ จะได้ว่า

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -3 + 2i$ และ $z_3 = 4 - 5i$ จงหาค่าของ $z_1 z_2$, $z_1 z_3$ และ $z_2 z_3$

วิธีทำ จากบทนิยาม $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
และจาก $z_1 = 3 + 2i$ และ $z_2 = -3 + 2i$
จะได้ว่า $a = 3$, $b = 2$, $c = -3$ และ $d = 2$

$$\begin{aligned} \therefore z_1 z_2 &= [(3 \times (-3)) - (2 \times 2)] + [(3 \times 2) + (2 \times (-3))]i \\ &= (-9 - 4) + (6 - 6)i \\ &= -13 + 0i \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} z_1 z_3 &= [(3 \times 4) - (2 \times (-5))] + [(3 \times (-5)) + (4 \times 2)]i \\ &= (12 + 10) + (-15 + 8)i \\ &= 22 - 7i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 z_3 &= [(-3 \times 4) - (2 \times (-5))] + [(-3 \times (-5)) + (2 \times 4)]i \\ &= (-12 + 10) + (15 + 8)i \\ &= -2 + 23i \end{aligned}$$



4. การหาค่า i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ตารางแสดงค่า i ที่อยู่ในรูปยกกำลังต่าง ๆ

ข้อที่	i อยู่ในรูปยกกำลัง	ค่าของ i	ข้อที่	i อยู่ในรูปยกกำลัง	ค่าของ i
1	i^2	-1	7	i^3	-i
2	i^4	1	8	i^5	i
3	i^6	-1	9	i^7	-i
4	i^8	1	10	i^9	i
5	i^{10}	-1	11	i^{11}	-i
6	i^{12}	1	12	i^{13}	i

จากตาราง จะเห็นว่าค่าของ i^n จะมีคำตอบ 1, -1, i, -i เพียง 4 คำตอบเท่านั้น ไม่ว่า i จะยกกำลังเท่าไรก็ตาม ดังนั้นจึงสามารถสรุปการหาค่าของ i^n ได้ดังนี้

$$i^n = \begin{cases} i & \text{เมื่อ } n \text{ หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 1} \\ -1 & \text{เมื่อ } n \text{ หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 2} \\ -i & \text{เมื่อ } n \text{ หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 3} \\ 1 & \text{เมื่อ } n \text{ หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 0} \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหา ค่าของ i^{136} และ i^{2345}

วิธีทำ $i^{136} = 1$ ($\because$ 4 หาร 136 แล้วเหลือเศษ 0 หรือหารลงตัว)

$i^{2345} = i$ ($\because$ 4 หาร 2345 แล้วเหลือเศษ 1)



5. คุณสมบัติเกี่ยวกับการบวก การคูณ จำนวนเชิงซ้อน

- 1). คุณสมบัติปิดของการบวก
ถ้า $Z_1, Z_2 \in C$ จะได้ $Z_1 + Z_2 \in C$
- 2). คุณสมบัติปิดของการคูณ
ถ้า $Z_1, Z_2 \in C$ จะได้ $Z_1 \cdot Z_2 \in C$
- 3). คุณสมบัติของการเปลี่ยนกลุ่มของการบวก
ถ้า $Z_1, Z_2, Z_3 \in C$ จะได้ $(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$
- 4). คุณสมบัติของการเปลี่ยนกลุ่มของการคูณ
ถ้า $Z_1, Z_2, Z_3 \in C$ จะได้ $(Z_1 Z_2) Z_3 = Z_1 (Z_2 Z_3)$
- 5). คุณสมบัติการสลับที่ของการบวก
ถ้า $Z_1, Z_2 \in C$ จะได้ $Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$
- 6). คุณสมบัติการสลับที่ของการคูณ
ถ้า $Z_1, Z_2 \in C$ จะได้ $Z_1 Z_2 = Z_2 Z_1$
- 7). คุณสมบัติการแจกแจง
ถ้า $Z_1, Z_2, Z_3 \in C$ จะได้ $Z_1(Z_2 + Z_3) = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3$





คำชี้แจง ให้นักเรียนทำเป็นกิจกรรมกลุ่มให้ปฏิบัติตามเงื่อนไข แล้วนำผลงานมาอภิปรายร่วมกัน

1. จงบอกส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- | | | |
|---------------|-------------------|----------------------|
| 1). $3 + 4i$ | ส่วนจริงคือ _____ | ส่วนจินตภาพคือ _____ |
| 2). $-2 + 5i$ | ส่วนจริงคือ _____ | ส่วนจินตภาพคือ _____ |
| 3). $-3 - 6i$ | ส่วนจริงคือ _____ | ส่วนจินตภาพคือ _____ |
| 4). $-5i$ | ส่วนจริงคือ _____ | ส่วนจินตภาพคือ _____ |
| 5). 10 | ส่วนจริงคือ _____ | ส่วนจินตภาพคือ _____ |

2. จงหาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- | | |
|----------------------------------|---------|
| 1). $(-4, 5) + (-5, -6)$ | = _____ |
| 2). $(3 - 7i) + (-3 + 7i)$ | = _____ |
| 3). $(2, -8) + (-3, 5)$ | = _____ |
| 4). $(-5, 4) + (7, 8) + (5, 10)$ | = _____ |
| 5). $(6, 7) (-3, 5)$ | = _____ |
| 6). $(5 + 2i)(3 - 4i)$ | = _____ |
| 7). $(3, 4) (5, 6) (3, -4)$ | = _____ |
| 8). $(3 + 4i)(2 + 5i)(1 + i)$ | = _____ |
| 9). $(0, 5) (0, 4) (0, 2)$ | = _____ |
| 10). $(2 - i)^2$ | = _____ |

ตอบกันได้หรือเปล่าค่ะ !!!!

ทำกิจกรรมที่ 2
ต่อเลยนะนักเรียน

$a + c$



เป็นกิจกรรมกลุ่มให้ปฏิบัติตามเงื่อนไข แล้วนำผลงานมาอภิปรายร่วมกัน

จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูป $a + bi$

- 1). $2(1 + 4i) - 3(2 + i)$ = _____
- 2). $(1 - i)(2 + 7i)$ = _____
- 3). $(1 + i)^2$ = _____
- 4). $(3 + 2i)(i + 2)i + (1 + i)^2$ = _____
- 5). $i^{34} + i^{19}$ = _____
- 6). $i^{137} - (-i)^{30}$ = _____
- 7). $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$ = _____
- 8). $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{11}$ = _____
- 9). $(-1)^3 + (-1)^{10} + (-i)^{25}$ = _____
- 10). $[(1 + i)(1 - i)]^5$ = _____

“ช่วยกันหน่อยค่ะ !!!!”





แบบฝึกทักษะชุดที่ 1

รายวิชา ค32202

คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

เรื่อง การสร้างจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงหาจำนวนจริง x, y ที่สอดคล้องกับสมการ

1.1 $(x - y, x + y) = (2, 6)$

.....
.....
.....

1.2 $(x + 2y, 3) = (3, 2x - y)$

.....
.....
.....

1.3 $(x + 2, 7) + (y, 3x - y) = (-2, 4)$

.....
.....
.....

1.4 $(x, y)(4, 3) = (2, -1)$

.....
.....
.....

1.5 $(-x, -9) + (-5, 2y) = (-3, 8)$

.....
.....
.....



2. จงหาส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ

2.1 $(3, -4) + (6, 2)$

.....
.....
.....

ส่วนจริง คือ.....

ส่วนจินตภาพ คือ.....

2.2 $(-2, -1)(5, -3)$

.....
.....
.....

ส่วนจริง คือ.....

ส่วนจินตภาพ คือ.....

2.3 $(1, 2) + (2, 3) + (3, 4)$

.....
.....
.....

ส่วนจริง คือ.....

ส่วนจินตภาพ คือ.....

2.4 $5(2, -3)(1, -2)$

.....
.....
.....

ส่วนจริง คือ.....

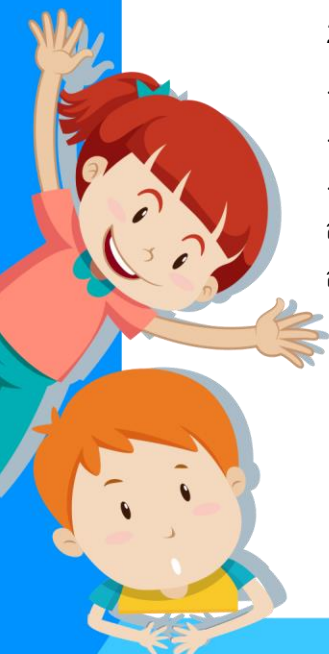
ส่วนจินตภาพ คือ.....

2.5 $(3 - 2i)(7i)(-1 - i)$

.....
.....
.....

ส่วนจริง คือ.....

ส่วนจินตภาพ คือ.....





เฉลยใบกิจกรรมและแบบฝึกทักษะ



เฉลยใบกิจกรรมที่ 1

เป็นกิจกรรมกลุ่มให้ปฏิบัติตามเงื่อนไข แล้วนำผลงานมาอภิปรายร่วมกัน

1. จงบอกส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- | | | | | |
|---------------|-------------|----|----------------|----|
| 1). $3 + 4i$ | ส่วนจริงคือ | 3 | ส่วนจินตภาพคือ | 4 |
| 2). $-2 + 5i$ | ส่วนจริงคือ | -2 | ส่วนจินตภาพคือ | 5 |
| 3). $-3 - 6i$ | ส่วนจริงคือ | -3 | ส่วนจินตภาพคือ | -6 |
| 4). $-5i$ | ส่วนจริงคือ | 0 | ส่วนจินตภาพคือ | -5 |
| 5). 10 | ส่วนจริงคือ | 10 | ส่วนจินตภาพคือ | 0 |

2. จงหาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

- | | | |
|----------------------------------|---|--------------|
| 1). $(-4, 5) + (-5, -6)$ | = | $(-9, -1)$ |
| 2). $(3 - 7i) + (-3 + 7i)$ | = | $(0, 0)$ |
| 3). $(2, -8) + (-3, 5)$ | = | $(-1, -3)$ |
| 4). $(-5, 4) + (7, 8) + (5, 10)$ | = | $(7, 22)$ |
| 5). $(6, 7) (-3, 5)$ | = | $(-53, 9)$ |
| 6). $(5 + 2i)(3 - 4i)$ | = | $23 - 14i$ |
| 7). $(3, 4) (5, 6) (3, -4)$ | = | $(-43, 24)$ |
| 8). $(3 + 4i)(2 + 5i)(1 + i)$ | = | $(-37 + 9i)$ |
| 9). $(0, 5) (0, 4) (0, 2)$ | = | $(0, -40)$ |
| 10). $(2 - i)^2$ | = | $(3, -4)$ |





เฉลยใบกิจกรรมที่ 2
เป็นกิจกรรมกลุ่มให้ปฏิบัติตามเงื่อนไข แล้วนำผลงานมาอภิปรายร่วมกัน

จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูป $a + bi$

- 1). $2(1 + 4i) - 3(2 + i)$ $= -4 + 5i$
- 2). $(1 - i)(2 + 7i)$ $= 9 + 5i$
- 3). $(1 + i)^2$ $= 0 + 2i$
- 4). $(3 + 2i)(i + 2)i + (1 + i)^2$ $= 4 + 9i$
- 5). $i^{34} + i^{19}$ $= -1 - i$
- 6). $i^{137} - (-i)^{30}$ $= 1 + i$
- 7). $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$ $= \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$
- 8). $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{11}$ $= 0 + 0i$
- 9). $(-1)^3 + (-1)^{10} + (-i)^{25}$ $= 0 - i$
- 10). $[(1 + i)(1 - i)]^5$ $= 32$





เฉลยแบบฝึกทักษะชุดที่ 1

รายวิชา ค32202

คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

เรื่อง การสร้างจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงหาจำนวนจริง x, y ที่สอดคล้องกับสมการ

1.1 $(x - y, x + y) = (2, 6)$

แสดงว่า

$$x - y = 2 \quad \text{-----1}$$

$$x + y = 6 \quad \text{-----2}$$

$$1+2 ;$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

แทนค่า $x = 4$ ใน 2

$$4 + y = 6$$

$$\therefore y = 2$$

ดังนั้น

$$x = 4, y = 2$$

1.2 $(x + 2y, 3) = (3, 2x - y)$

แสดงว่า

$$x + 2y = 3 \quad \text{-----1}$$

$$2x - y = 3 \quad \text{-----2}$$

$$1 \times 2 ;$$

$$2x + 4y = 6 \quad \text{-----3}$$

$$-5y = -3$$

$$2-3 ;$$

$$y = \frac{3}{5}$$

แทนค่า $y = \frac{3}{5}$ ใน 1

$$x + 2\left(\frac{3}{5}\right) = 3$$

$$x = 3 - \frac{6}{5}$$

$$x = \frac{9}{5}$$

ดังนั้น

$$x = \frac{9}{5}, y = \frac{3}{5}$$



$$1.3 \quad (x+2, 7) + (y, 3x-y) = (-2, 4)$$

$$(x+y+2, 3x-y+7) = (-2, 4)$$

แสดงว่า $x+y = -4$ -----1

$3x-y = -3$ -----2

$1+2;$ $4x = -7$

$$x = -\frac{7}{4}$$

แทนค่า x ใน 1

$$-\frac{7}{4} + y = -4$$

$$y = -\frac{9}{4}$$

ดังนั้น

$$x = -\frac{7}{4}, y = -\frac{9}{4}$$

$$1.4 \quad (x, y)(4, 3) = (2, -1)$$

$$(4x-3y, 3x+4y) = (2, -1)$$

แสดงว่า $4x-3y = 2$ -----1

$3x+4y = -1$ -----2

$1 \times 3;$ $12x-9y = 6$ -----3

$2 \times 4;$ $12x+16y = -4$ -----4

$3-4;$ $-25y = 10$

$$y = -\frac{10}{25} = -\frac{2}{5}$$

แทนค่า $y = -\frac{2}{5}$ ใน 1

$$4x - 3\left(-\frac{2}{5}\right) = 2$$

$$4x + \frac{6}{5} = 2$$

$$4x = 2 - \frac{6}{5}$$

$$4x = \frac{4}{5}$$

$$x = \frac{1}{5}$$

ดังนั้น $x = \frac{1}{5}, y = -\frac{2}{5}$



$$1.5 \quad (-x, -9) + (-5, 2y) = (-3, 8)$$

แสดงว่า

$$-x - 5 = -3$$

$$x = -2$$

และ

$$-9 + 2y = 8$$

$$y = \frac{7}{2}$$

ดังนั้น

$$x = -2, y = \frac{17}{2}$$

2. จงหาส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ

$$2.1 \quad (3, -4) + (6, 2)$$

$$(3, -4) + (6, 2) = (9, -2)$$

ส่วนจริง คือ 9

ส่วนจินตภาพ คือ -2

$$2.2 \quad (-2, -1)(5, -3)$$

$$(-2, -1)(5, -3) = (-13, 1)$$

ส่วนจริง คือ -13

ส่วนจินตภาพ คือ 1

$$2.3 \quad (1, 2) + (2, 3) + (3, 4)$$

$$(1, 2) + (2, 3) + (3, 4) = (6, 9)$$

ส่วนจริง คือ 6

ส่วนจินตภาพ คือ 9

$$2.4 \quad 5(2, -3)(1, -2)$$

$$5(2, -3)(1, -2) = (-20, -35)$$

ส่วนจริง คือ -20

ส่วนจินตภาพ คือ -35

$$2.5 \quad (3 - 2i)(7i)(-1 - i)$$

$$(3 - 2i)(7i)(-1 - i) = 7 - 35i$$

ส่วนจริง คือ 7

ส่วนจินตภาพ คือ -35



แบบทดสอบย่อยท้ายแผนการจัดการเรียนรู้ ชุดที่ 1
เรื่อง การสร้างจำนวนเชิงซ้อน
รายวิชา ค33202 คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบย่อยท้ายแผนการจัดการเรียนรู้ ชุดที่ 1 ใช้ทดสอบความรู้ของนักเรียนเรื่อง การสร้างจำนวนเชิงซ้อน จำนวน 15 ข้อ
2. การตอบแบบทดสอบ ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในกระดาษคำตอบ ที่เป็นคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว โดยใช้เวลาสอบ 35 นาที

1.. ค่าของ $i^{16} + i^{17} + i^{18} + i^{19}$ เท่ากับจำนวนในข้อใด

- ก. 0
- ข. 1
- ค. -1
- ง. 2

2. ค่าของ $i^{16} i^{17} i^{18} i^{19}$ เท่ากับจำนวนในข้อใด

- ก. 0
- ข. 1
- ค. -1
- ง. 2

3. ค่าของ $i^1 + i^2 + i^3 + \dots + i^{2551}$

- ก. 0
- ข. 1
- ค. -1
- ง. 2

4. ค่าของจำนวนจริง x และ y ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $i(2x - 4y) = 4x + 2 + 3yi$ เท่ากับจำนวนในข้อใด

- ก. $x = -\frac{1}{2}$ และ $y = -\frac{1}{7}$
- ข. $x = \frac{1}{2}$ และ $y = \frac{1}{7}$
- ค. $x = \frac{1}{7}$ และ $y = \frac{1}{2}$
- ง. $x = -\frac{1}{7}$ และ $y = -\frac{1}{2}$

5. ค่าของ $6 + (2 - 4i) + 3i + (-4 + 8i)$ เท่ากับจำนวนในข้อใด

- ก. $7 - 4i$
- ข. $7 - 4-i$
- ค. $7 + 4-i$
- ง. $7 + 4i$

6. ค่าของ $2 + 4)i3 - 4) + (i2 + 3-) + (i($ เท่ากับจำนวนในข้อใด

- ก. $9 + 5i$
- ข. $+ 5i$
- ค. $4 + 8i$
- ง. $9 + 11i$



7. ค่าของ $5i + (-1 - 3i) + 3i + (-5 - i) + 6i$ เท่ากับจำนวนในข้อใด

ก. $7 - 4i$

ข. $-6 + 10i$

ค. $67 + i$

ง. $4 - 10i$

8. ค่าของ $(2 + 4i)(3 - 4) + (i(2 + 3) + i)$ เท่ากับจำนวนในข้อใด

ก. $9 + 5i$

ข. $+ 5i$

ค. $4 + 8i$

ง. $9 + 11i$

9. ถ้า $(x + y) + (x + yi) = 3 + 5i$ และ x, y เป็นจำนวนจริง แล้ว $x + y$ เท่ากับจำนวนใด

ก. 4

ข. 5

ค. 6

ง. 7

10. ข้อใดผิด

ก. $(1 + i)(1 - i) = 1$

ข. $(1 + 2i)(1 - 2i) = 5$

ค. $(2 + 3i)(2 - 3i) = 13$

ง. $(1 + 4i)(1 - 4i) = 17$

11. ข้อใดถูกต้อง

ก. $-4(1 + 5i) = -4 + 20i$

ข. $4(1 + 2i) = 1 + 8i$

ค. $2(1 + 2i) = 2 + 4i$

ง. $3(2 + 7i) = 6 + 7i$

12. ผลคูณของ

$$(1 + 2i)(3 + 6i)(1 - 2i)(3 - 6i)$$

มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 275

ข. 225

ค. 90

ง. 60

13. ผลบวก $2(1 + 4i) + 3(2 + i)$ ตรงกับข้อใด

ก. $-8 - 11i$

ข. $-4 + 5i$

ค. $4 + 5i$

ง. $8 + 11i$

14. ผลคูณ $(1 + i)(3 - 4i)$ ตรงกับข้อใด

ก. $7 + i$

ข. $-7 + i$

ค. $-7 - i$

ง. ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

15. ถ้า $(3 + 2i)(x + yi) = (9 - 7i)$ แล้วค่าของ x และ y ตรงกับข้อใด

ก. $x = 9, y = -7$

ข. $x = 7, y = 9$

ค. $x = -7, y = 9$

ง. $x = -9, y = -7$





กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน
ชุดที่ 1 เรื่องการสร้างจำนวนเชิงซ้อน



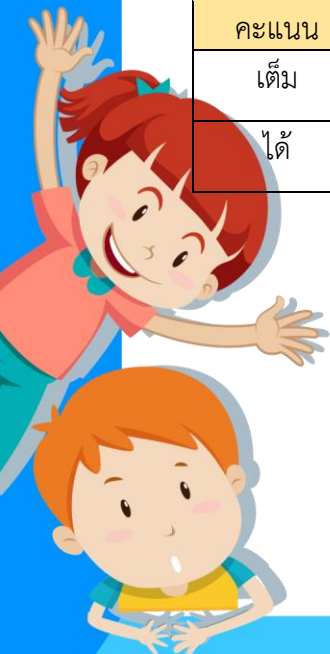
ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

คำชี้แจง ให้นักเรียนเลือกคำตอบในแบบทดสอบแล้วทำเครื่องหมาย x ตรงกับตัวเลือกที่ถูกที่สุดเพียงข้อละคำตอบเดียว

ข้อที่	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				

คะแนน	ก่อนเรียน
เต็ม	
ได้	

ผู้ตรวจ.....
วันที่.....เดือน.....พ.ศ.





เฉลยแบบทดสอบย่อยท้ายแผนการจัดการเรียนรู้ ชุดที่ 1



1. ก
2. ค
3. ค
4. ก
5. ง
6. ข
7. ข
8. ข
9. ก
10. ก
11. ค
12. ข
13. ง
14. ง
15. ก

