แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน
(Complex Number)

เล่ม 1 การสร้างจำนวนเชิงซ้อน

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค32202)

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

นางดาวัลย์ ภูวดล

ตำแหน่งครู วิทยฐานะครูชำนาญการ

โรงเรียนคลองลานวิทยา

อำเภอคลองลาน จังหวัดกำแพงเพชร

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 41

www.krooobanok.com

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
เรื่องจำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)

การสร้างจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ-สกุล.....

เลขที่.....ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5/.....

จัดทำโดย

นางดาวัลย์ ภูวดล

ตำแหน่งครู วิทยฐานะครูชำนาญการ

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค32202)

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

โรงเรียนคลองลานวิทยา

อำเภอคลองลาน จังหวัดกำแพงเพชร

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 41

www.kroobannok.com

สารบัญ

	หน้า
คำชี้แจงการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์	1
คำชี้แจงสำหรับครู	1
คำชี้แจงสำหรับนักเรียน	2
ลำดับขั้นตอนการทำแบบฝึกทักษะ	3
แบบทดสอบก่อนเรียน	4
กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน	6
สาระและมาตรฐานการเรียนรู้	7
ผลการเรียนรู้และจุดประสงค์การเรียนรู้	8
ใบความรู้ที่ 1.1	9
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ที่ 1.1	15
ใบความรู้ที่ 1.2	16
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ที่ 1.2	19
ใบความรู้ที่ 1.3	21
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ที่ 1.3	27
แบบทดสอบหลังเรียน	31
กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน	33
บรรณานุกรม	34
ภาคผนวก	35
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน	36
เฉลยแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ที่ 1.1	37
เฉลยแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ที่ 1.2	39
เฉลยแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ที่ 1.3	41
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน	46
แบบบันทึกผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์	47
ข้อมูลผู้จัดทำ	48

www.kroobannok.com

คำนำ

แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ชุดนี้จัดทำขึ้น เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค32202) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 และสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ซึ่งได้เน้นการพัฒนาทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียน เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจ มีทักษะที่จำเป็น ได้แก่ ทักษะการคิดคำนวณ ทักษะการแก้ปัญหา การให้เหตุผล ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ฝึกให้นักเรียนมีการวิเคราะห์โจทย์ ตามความสามารถความแตกต่างระหว่างบุคคลให้นักเรียนทำงาน อย่างเป็นระบบ มีระเบียบวินัย รอบคอบ มีความรับผิดชอบ ตระหนักในคุณค่า และมี เจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ ตลอดจนตอบสนองผลการเรียนรู้ แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ชุดนี้ได้จัดทำขึ้นจำนวน 6 เล่ม ประกอบด้วย

เล่มที่ 1 การสร้างจำนวนเชิงซ้อน
เล่มที่ 2 สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน
เล่มที่ 3 กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
เล่มที่ 4 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว
เล่มที่ 5 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน
เล่มที่ 6 สมการพหุนาม

ทั้งนี้ เพื่อให้การพัฒนาทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เป็นไปตามเป้าหมาย นักเรียนควรปฏิบัติตามขั้นตอนในการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์อย่างครบถ้วน

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่า แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์เรื่องจำนวนเชิงซ้อนชุดนี้จะช่วยให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจ มีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์เพิ่มมากขึ้น และเป็นพื้นฐานที่ดีในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ ในระดับที่สูงขึ้นและนำไปใช้ให้เกิดประโยชน์ในชีวิตประจำวันต่อไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ดาวัลย์ ภูวดล

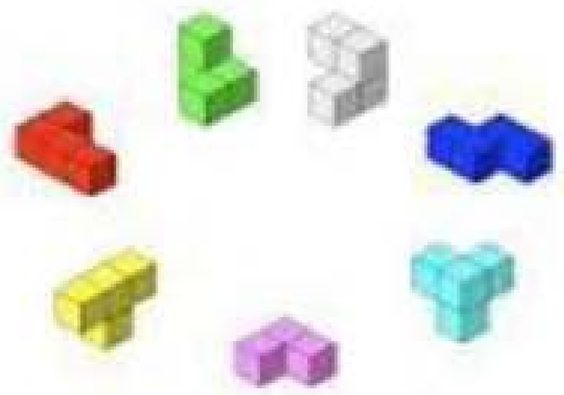
www.kroobannok.com

คำชี้แจงการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

คำชี้แจงสำหรับครู

เมื่อครูผู้สอนนำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่มนี้ไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ควรมีแนวปฏิบัติดังนี้

1. ให้ทดสอบความรู้ก่อนเรียนของนักเรียน เพื่อวัดความพื้นฐานของนักเรียนรายบุคคล
2. จัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เล่มนี้ ควบคู่กับแผนการจัดการเรียนรู้
3. ขณะปฏิบัติกิจกรรมครูคอยแนะนำให้ความรู้แก่นักเรียนอย่างใกล้ชิด
4. เมื่อนักเรียนทำแบบฝึกทักษะเสร็จ ให้นักเรียนตรวจคำตอบจากแบบเฉลยและบันทึกคะแนน
5. เปิดโอกาสให้นักเรียนซักถามข้อสงสัย และเนื้อหาที่ไม่เข้าใจและครูอธิบายเพิ่มเติมจนนักเรียนเข้าใจ
6. ทดสอบความรู้ของนักเรียนโดยใช้แบบทดสอบหลังเรียน
7. ครูสามารถใช้แบบฝึกทักษะนี้ในการเรียนรู้และสอนซ่อมเสริมความรู้ด้วยตนเองได้



คำชี้แจงสำหรับนักเรียน

1. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่องจำนวนเชิงซ้อน ได้แบ่งสาระการเรียนรู้ออกเป็น 6 เล่ม เล่มนี้เป็นเล่มที่ 1 เรื่อง การสร้างจำนวนเชิงซ้อน ใช้เวลาในการฝึกทักษะ จำนวน 3 ชั่วโมง นักเรียนสามารถเรียนรู้และฝึกปฏิบัติได้ด้วยตนเอง การใช้แบบฝึกทักษะ ควรปฏิบัติตามกฎกติกาในการใช้อย่างเคร่งครัด จึงจะได้ผลดี

2. ให้นักเรียนศึกษาสาระ มาตรฐานการเรียนรู้ ผลการเรียนรู้ และจุดประสงค์การเรียนรู้

3. ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหา คำอธิบาย พร้อมตัวอย่างจากใบความรู้ของแบบฝึกทักษะให้เข้าใจ

4. ในการทำแบบฝึกทักษะ ให้นักเรียนทำด้วยตนเอง เรียงลำดับตามขั้นตอน อย่าเปิดข้ามหน้าใดหน้าหนึ่งโดยเด็ดขาด และให้มีความซื่อสัตย์ ไม่เปิดดูเฉลยก่อน เมื่อทำเสร็จแล้วจึงตรวจคำตอบและบันทึกคะแนน

5. เมื่อนักเรียนทำแบบฝึกทักษะเรียบร้อยทุกแบบฝึกในเล่มแล้ว ให้ทำแบบทดสอบหลังเรียน เสร็จแล้วให้เปลี่ยนกันตรวจคำตอบตามเฉลยท้ายเล่มและบันทึกผลคะแนนที่ได้ เพื่อให้ทราบผลการพัฒนาภายหลังจากการทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

6. ให้นักเรียนตั้งใจ มีสมาธิ และมีความซื่อสัตย์ในการฝึกทำแบบฝึกทักษะ เพราะจะทำให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการเรียนรู้ได้

7. ถ้านักเรียนมีข้อสงสัยเกี่ยวกับเนื้อหาสาระ ตัวอย่างหรือโจทย์ในแบบฝึกทักษะให้ถามครู เพื่อขอคำแนะนำ

8. ในแต่ละแบบฝึกนักเรียนต้องทำแบบฝึกทักษะถูกต้องร้อยละ 75 ขึ้นไปของจำนวนข้อทั้งหมด จึงจะถือว่าผ่านเกณฑ์การประเมินของแต่ละแบบฝึก

ลำดับขั้นตอนการทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียน

ขั้นที่ 1 อ่านคำชี้แจงให้เข้าใจ

ขั้นที่ 2 ทำแบบทดสอบก่อนเรียน

ขั้นที่ 3 ศึกษาสาระ มาตรฐานการเรียนรู้ ผลการเรียนรู้และจุดประสงค์การเรียนรู้

ขั้นที่ 4 ศึกษาใบความรู้และตัวอย่าง

ขั้นที่ 5 ทำแบบฝึกทักษะและตรวจคำตอบ

ขั้นที่ 6 ทำแบบทดสอบหลังเรียน

ขั้นที่ 7 ตรวจแบบทดสอบและบันทึกผลคะแนนที่ทำได้

ศึกษาตามลำดับขั้นตอนนะจ๊ะ

แบบทดสอบก่อนเรียน

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบก่อนเรียนนี้เป็นแบบปรนัยเลือกตอบมี 4 ตัวเลือก มีจำนวน 10 ข้อ คะแนนเต็ม 10 คะแนน ใช้เวลาทำ 20 นาที

2. จงเลือกคำตอบที่ถูกที่สุดเพียงข้อละคำตอบเดียว แล้วทำเครื่องหมายกากบาท (x) ทับตัวอักษร ก , ข , ค หรือ ง ทำลงในกระดาษคำตอบ

3. เกณฑ์การให้คะแนน คือ ตอบถูกได้ 1 คะแนน , ตอบผิดได้ 0 คะแนน

1. ข้อใดต่อไปนี้**ไม่ถูกต้อง**

ก. $7\sqrt{-18}-2\sqrt{-2}=19\sqrt{2}i$ ข. $5\sqrt{-2}+2\sqrt{-8}=9\sqrt{2}i$

ค. $4\sqrt{-12}-5\sqrt{-3}=4\sqrt{3}i$ ง. $2\sqrt{-3}+7\sqrt{-27}=23\sqrt{3}i$

2. ข้อใดต่อไปนี้**ไม่ถูกต้อง**

ก. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}=-6$ ข. $\sqrt{-8}\sqrt{-125}=-10\sqrt{10}$

ค. $\frac{5}{\sqrt{-5}}=-\sqrt{5}i$ ง. $\frac{2\sqrt{-12}}{3\sqrt{-3}}=-\frac{4}{3}$

3. ค่าของ $i+i^2+i^3+...+i^{101}$ เท่ากับข้อใด

ก. -1 ข. i

ค. $-i$ ง. 1

4. กำหนดให้ $z=i^9+i^{10}+...+i^{126}$
เมื่อ $i^2=-1$ แล้วค่าของ z เท่ากับข้อใด

ก. $-1-i$ ข. $1-i$

ค. $-1+i$ ง. $1+i$

5. จงหาค่าของ $(4+3i)-(4-2i)$ เท่ากับข้อใด

ก. $5i$ ข. $-5i$

ค. 5 ง. -5

6. ให้ $z_1 = 2-5i$ และ $z_2 = 4+3i$ จงหาค่าของ $2z_1 - 4z_2$ เท่ากับข้อใด

ก. $12-22i$ ข. $-12+22i$

ค. $12+22i$ ง. $-12-22i$

7. ให้ $z_1 = 2-4i$, $z_2 = 6+3i$, $z_3 = 1+i$ จงหาค่าของ $(z_1 + 2z_2) + z_3$ เท่ากับข้อใด

ก. $15-3i$ ข. $15+3i$

ค. $15+11i$ ง. $15-11i$

8. ค่าของ $(2+3i)\left(-1+\sqrt{-1}\right)$ เท่ากับข้อใด

ก. $-5-i$ ข. $-5+i$

ค. $1-i$ ง. $1+i$

9. ให้ $3-2i = (5p-q)+(p+5q)i$ จงหาค่า p และ q เท่ากับข้อใด

ก. $p=-\frac{1}{2}, q=-\frac{1}{2}$ ข. $p=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$

ค. $p=\frac{1}{2}, q=-\frac{1}{2}$ ง. $p=-\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$

10. ถ้า x และ y สอดคล้องกับสมการ $(2x+yi)(1+i) = -2+6i$ แล้ว $x+y$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 1 ข. 4

ค. 5 ง. 6

ยิ้มหน่อยค่ะ บางข้ออาจจะยังไม่รู้
ไม่เป็นไรค่ะ เป็นแบบทดสอบก่อนเรียน
แต่ก็พยายามทำให้ดีที่สุดนะจ๊ะ

กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่องจำนวนเชิงซ้อน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่มที่ 1 การสร้างจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....เลขที่.....ชั้น.....

คำชี้แจง จงเลือกตอบข้อที่ถูกที่สุดเพียงข้อละคำตอบเดียว แล้วให้นักเรียนกาเครื่องหมายกาบาท (x) ลงในช่องคำตอบที่เลือกให้ถูกต้อง

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

คะแนนเต็มของแบบทดสอบก่อนเรียน	คะแนนที่ทำได้
10	

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

มาตรฐาน

ค 1.1 เข้าใจถึงความหลากหลายของการแสดงจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง

ค 1.2 เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างการดำเนินการต่าง ๆ และสามารถใช้การดำเนินการในการแก้ปัญหา

ค 1.3 ใช้การประมาณค่าในการคำนวณและแก้ปัญหา

ค 1.4 เข้าใจระบบจำนวนและนำสมบัติเกี่ยวกับจำนวนไปใช้

สาระที่ 4 พีชคณิต

มาตรฐาน

ค 4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมาย และนำไปใช้แก้ปัญหา

สาระที่ 6 ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน

ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ผลการเรียนรู้

ผลการเรียนรู้

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน เขียนกราฟ และหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
2. หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก
3. แก้สมการพหุนามตัวแปรเดียวที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและมีดีกรีไม่เกินสาม

www.kroopor.com

จุดประสงค์การเรียนรู้ เรื่องการสร้างจำนวนซ้อน

1. นักเรียนสามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อนให้อยู่ในรูป (a,b) หรือ a+bi และบอกส่วนจริง ส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนได้

2. นักเรียนสามารถบอกได้ว่าจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนที่กำหนดให้เท่ากันหรือไม่และนำความรู้เรื่องการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อนไปใช้ได้

3. นักเรียนสามารถหาผลบวก ผลคูณ และบอกสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวก การคูณของจำนวนเชิงซ้อนได้

www.lanrin.com

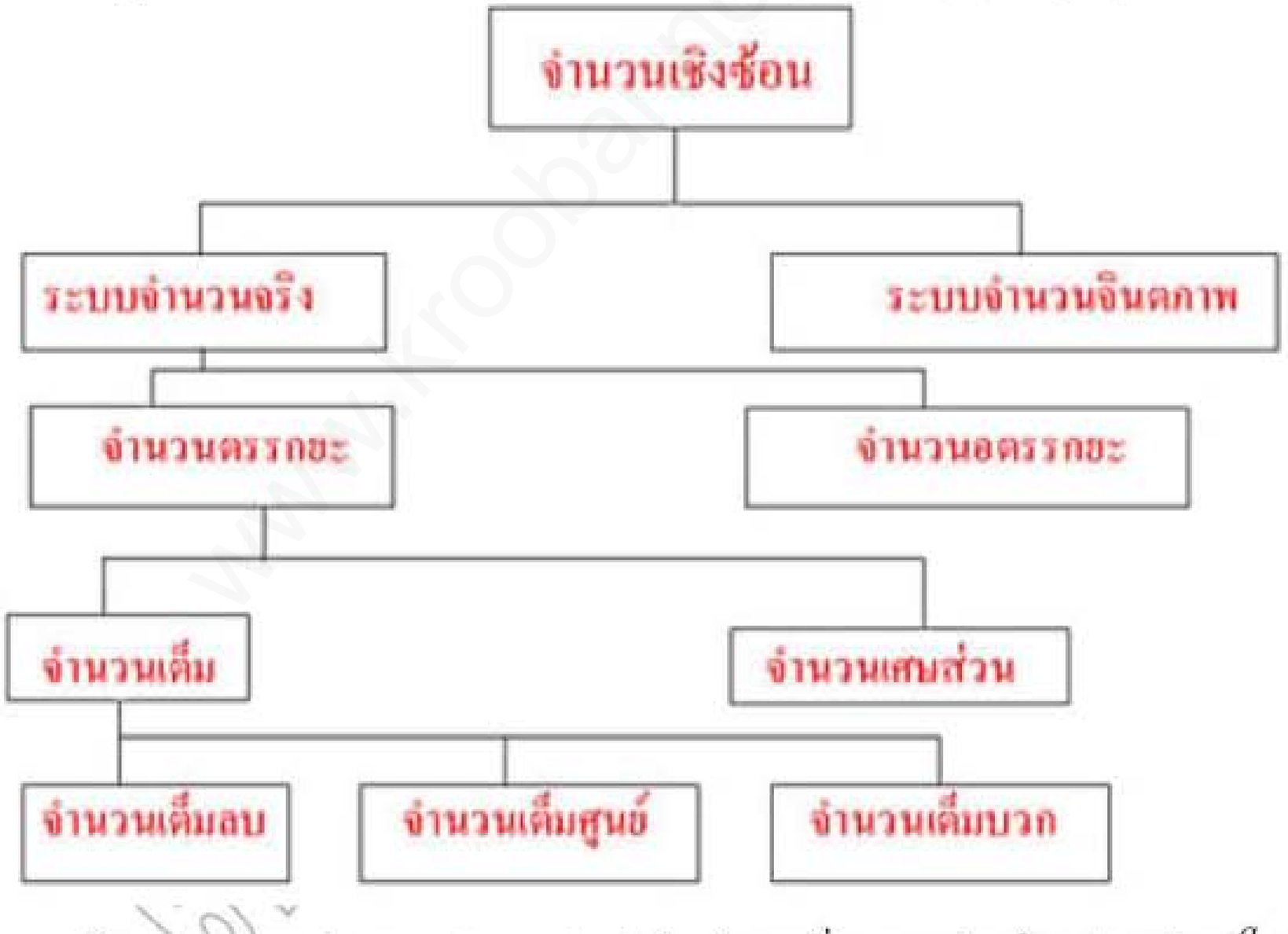
ใบความรู้ที่ 1.1

จำนวนจินตภาพ (Imaginary unit) และการหาค่า i^n

ในระบบจำนวน เท่าที่มนุษย์คิดค้นพบในขณะนี้ประกอบด้วยเลขจำนวน 2 ระบบ คือ

1. ระบบจำนวนจริง (Real Number System)
2. ระบบจำนวนเชิงซ้อนประเภทจินตภาพ (Imaginary Number System)

สรุปเป็นแผนภูมิได้ดังนี้



จำนวนตรรกยะ (Rational Number) คือ จำนวนที่สามารถเขียนในรูปเศษส่วน $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $b \neq 0$ จำนวนตรรกยะ จำแนกได้เป็น 3 ประเภทใหญ่ ๆ คือ

1. จำนวนเต็ม (Integer)
2. เศษส่วน (Fraction)
3. ทศนิยม (Repeating decimal)

จำนวนอตรรกยะ (irrational Number) คือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนในรูปเศษส่วน $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $b \neq 0$ หรือจำนวนอตรรกยะคือ จำนวนที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะนั่นเอง จำนวนอตรรกยะ จำแนกได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ใหญ่คือ

1. จำนวนติดกรณ์บางจำนวน เช่น $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[4]{5}$ เป็นต้น
2. จำนวนทศนิยมไม่ซ้ำเช่น 5.181181684734 65

<u>หมายเหตุ</u> π ซึ่งประมาณได้ด้วย $\frac{22}{7}$ แต่จริงๆ แล้ว π เป็นเลขอตรรกยะ

<u>สิ่งที่ควรทราบ</u>

$\sqrt{2} \approx 1.4142135$

$\sqrt{3} \approx 1.7320508$

$\pi \approx \frac{22}{7} \approx 3.14159$

$\ell \approx 2.71828$

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจินตภาพ

จำนวนจินตภาพ (Imaginary number) เป็นระบบจำนวนที่ไม่มีอยู่จริงในชีวิตประจำวันถือกำเนิดขึ้นเนื่องจากนักคณิตศาสตร์พยายามที่จะแก้สมการบางสมการที่ไม่มีคำตอบที่อยู่ในระบบจำนวนจริง

เช่น $x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$

$x = \pm\sqrt{-1}$

จากกรณีที่แก้สมการแล้วได้ค่าที่ติดลบ ภายใต้รากที่ n เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ดังกล่าว จากสมการข้างต้น จะพบว่า ไม่มีจำนวนจริงใดเลยที่ยกกำลังสอง แล้วมีค่าติดลบ แต่ถ้ายังฝืนใช้หลักของจำนวนจริง ดำเนินการต่อไปอีก ก็จะพบว่าได้ค่า ที่ติดลบภายใต้เครื่องหมายกรณฑ์ที่สอง ซึ่งไม่สอดคล้องกับหลักการของจำนวนจริง

ดังนั้น จึงเป็นที่มาของการสร้างจำนวนชนิดใหม่ขึ้นมา เรียกว่า **จำนวนจินตภาพ** นั่นเอง ซึ่งมีประโยชน์อย่างมากในการคำนวณทางวิศวกรรมไฟฟ้า และสาขาอื่นๆ อีกมากมาย

เนื่องจาก $\sqrt{-1}$ ไม่เป็นจำนวนจริง เนื่องจากไม่มีจำนวนจริงใดที่ยกกำลังสองแล้วได้ -1 นักคณิตศาสตร์จึงได้นิยามจำนวนจินตภาพ i ขึ้นมา โดย $i = \sqrt{-1}$ นั่นเอง

การเขียนจำนวนจินตภาพในรูปหนึ่งหน่วยจินตภาพ

เช่น $\sqrt{-2}=\sqrt{2}i$, $\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$, $\sqrt{-4}=2i$, $\sqrt{-5}=\sqrt{5}i$, $\sqrt{-9}=3i$ เป็นต้น

บทนิยาม ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\sqrt{-1}=\sqrt{a}i \quad \text{เมื่อ } a>0$$

สำหรับจำนวนที่ไม่สามารถหาค่าได้ในระบบจำนวนจริงก็จะสามารถหาค่าได้ในระบบจำนวนเชิงซ้อน เช่น

$$\sqrt{-3}=\sqrt{3}\sqrt{-1}=\sqrt{3}i$$

$$\sqrt{-9}=\sqrt{9}\sqrt{-1}=3i$$

$$\sqrt{-3}\sqrt{-5}=\sqrt{3}i\sqrt{5}i=-\sqrt{15}$$

$$\sqrt{-9}\sqrt{-4}=(3i)(2i)=6i^2=-6 \quad \text{เป็นต้น}$$

ต่อไปเรามาศึกษา
การหาค่าของ i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก
กันนะครับ

การหาค่าของ i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

จาก $i^2=-1$ จะพิจารณาค่าของ i^n ดังนี้

$$i^1=i$$

$$i^2=-1$$

$$i^3=i^2\times i \qquad =(-1)i \qquad =-i$$

$$i^4=i^2\times i^2 \qquad =(-1)(-1) \qquad =1$$

$$i^5=i^4\times i \qquad =(1)(i) \qquad =i$$

$$i^6=i^4\times i^2 \qquad =(1)(-1) \qquad =-1$$

$$i^7=i^4\times i^3 \qquad =(1)(-i) \qquad =-i$$

$$i^8=i^4\times i^4 \qquad =(1)(1) \qquad =1$$

สรุป เพื่อให้นักเรียนหาค่าของ i^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกได้อย่างง่าย ๆ จึงขอสรุปแยกให้นักเรียนดูเป็นพวก ๆ ได้ดังนี้

➲ ค่าของ $i^n = i$ เมื่อนำ $n \div 4$ แล้วเหลือเศษ 1 เช่น i^5, i^9, i^{13} เป็นต้น

➲ ค่าของ $i^n = -1$ เมื่อนำ $n \div 4$ แล้วเหลือเศษ 2 เช่น i^2, i^6, i^{10} เป็นต้น

➲ ค่าของ $i^n = -i$ เมื่อนำ $n \div 4$ แล้วเหลือเศษ 3 เช่น i^3, i^7, i^{11} เป็นต้น

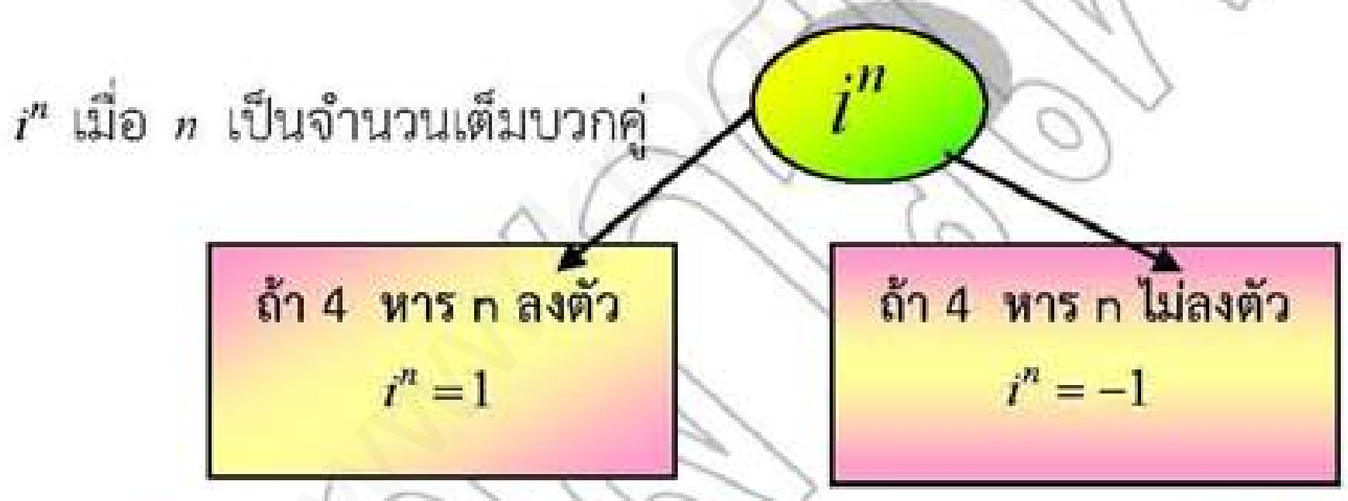
➲ ค่าของ $i^n = 1$ เมื่อนำ $n \div 4$ แล้วหารลงตัวพอดี เช่น i^4, i^8, i^{12} เป็นต้น

ต่อไปลองพิจารณาเลขชี้กำลังของ i ที่ทำให้ค่าออกมาเป็น 1 หรือ -1

$$i^2 = i^6 = i^{10} = -1 \qquad i^4 = i^8 = i^{12} = 1$$

จะพบว่า ถ้าเลขชี้กำลังของ i เป็นจำนวนคู่ ผลที่ได้จะเป็น 1 หรือ -1 และถ้า 4 หารลงตัว ผลที่ได้จะเป็น 1 แต่ถ้า 4 หารไม่ลงตัว ผลที่ได้จะเป็น -1

ดังแผนภาพ



ถ้า i^n และ n เป็นจำนวนคี่ ก็แยก i ออกมา 1 ตัว เพื่อให้ที่เหลืออยู่ในรูปที่เป็นจำนวนคู่ แล้วพิจารณาว่าเป็น 1 หรือ -1

เช่น 1) จงหาค่าของ $i^{27} = (i)(i^{26})$ เนื่องจาก $i^{26} = -1$

$$= (i)(-1)$$

ดังนั้น $i^{27} = -i$ ตอบ

2) จงหาค่าของ $i^{125} = (i)(i^{124})$ เนื่องจาก $i^{124} = 1$

$$= (i)(1)$$

ดังนั้น $i^{125} = i$ ตอบ

ตัวอย่าง 1 จงหาค่าของ i^n ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

เช่น $i^{25} = i$ เนื่องจาก 25 หารด้วย 4 เหลือเศษ 1

1. i^{98} คำตอบคือ -1 เนื่องจาก 98 หารด้วย 4 เหลือเศษ 2
2. i^{29} คำตอบคือ i เนื่องจาก 29 หารด้วย 4 เหลือเศษ 1
3. i^{125} คำตอบคือ i เนื่องจาก 125 หารด้วย 4 เหลือเศษ 1
4. i^{399} คำตอบคือ $-i$ เนื่องจาก 399 หารด้วย 4 เหลือเศษ 3
5. i^{1268} คำตอบคือ 1 เนื่องจาก 1268 หารด้วย 4 ลงตัว
6. i^{7649} คำตอบคือ i เนื่องจาก 7649 หารด้วย 4 เหลือเศษ 1

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของ $i^{20}+i^{21}+i^{22}+i^{23}+i^{24}+i^{25}+i^{26}+i^{27}+i^{28}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\underbrace{i^{20}+i^{21}+i^{22}+i^{23}}_{0}+\underbrace{i^{24}+i^{25}+i^{26}+i^{27}}_{0}+i^{28} = i^{28}$

$= 1$ ตอบ

ตัวอย่าง 3 จงหาค่าของ $i+i^2+i^3+...+i^{2536}+i^{2537}$

วิธีทำ พิจารณาการบวกเป็นชุด ๆ ดังนี้

$$i+i^2+i^3+i^4 = i+(-1)+(-i)+1=0$$

$$i^5+i^6+i^7+i^8 = i+(-1)+(-i)+1=0$$

จะพบว่าแต่ละชุดมีผลบวกเท่ากับ 0 และเลขชี้กำลังของ i ตัวสุดท้ายต้องหารด้วย 4 ลงตัว

ดังนั้น เลขชี้กำลังของ i พจน์สุดท้ายในชุดสุดท้ายคือ 2536

นั่นคือ $i+i^2+i^3+...+i^{2536}=0$

จะได้ว่าค่าของ $i+i^2+i^3+...+i^{2536}+i^{2537} = 0+i = i$ ตอบ

แบบฝึกทักษะที่ 1.1

คำชี้แจง จงแสดงวิธีทำมาโดยละเอียด

1. จงหาค่าของ $\sqrt{-9}\sqrt{-25}$

วิธีทำ $\sqrt{-9}\sqrt{-25}$ = ...

= .....

= .....

2. จงหาค่าของ $\sqrt{(-9)(-25)}$

วิธีทำ $\sqrt{(-9)(-25)}$ = ...

= .....

3. จงหาค่า i^n **แต่ละข้อต่อไปนี้**

3.1. i^{26} = ...

3.2. i^{88} = ...

3.3 i^{142} = ...

3.4. i^{1247} = ...

3.5. i^{1645} = ...

3.6. i^{136} = ...

3.7. i^{400} = ...

3.8. i^{1254} = ...

3.9. i^{2468} = ...

3.10. i^{3000} = ...

4. จงหาค่าของ $i+i^2+i^3+...+i^{2129}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

5. จงหาค่าของ $i+i^{35}+i^{125}+i^{1740}+i^{226}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

ใบความรู้ที่ 1.2

ความรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม กำหนด z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ และ a,b เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะเขียนจำนวนเชิงซ้อนได้ 2 รูปแบบ คือ

1) $z=(a,b)$

2) $z=a+bi$

โดยเรียก a ว่าส่วนจริง (real part) ของ z เขียนแทนด้วย $\mathrm{Re}(z)$และ

เรียก b ว่าส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ z เขียนแทนด้วย $\mathrm{Im}(z)$

จากบทนิยาม อาจกล่าวได้ว่า จำนวนจริงก็คือจำนวนเชิงซ้อน ที่มีส่วนจินตภาพเป็นศูนย์ จำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็นศูนย์ แต่ส่วนจินตภาพไม่ใช่ศูนย์ จะเรียกว่า **จำนวนจินตภาพแท้** (purely imaginary number)

การเรียกส่วนต่าง ๆ ของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ $z=a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แล้ว a เรียกว่า ส่วนจริง (real part)

b เรียกว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part)

i เรียกว่า จำนวนจินตภาพหนึ่งหน่วย (imaginar unit)

bi เรียกว่า จำนวนจินตภาพแท้ $(b\neq 0)$

$a+bi$ เรียกว่า จำนวนเชิงซ้อน $(a\neq 0, b\neq 0)$

เช่น $3+5i$ เรียกว่า จำนวนเชิงซ้อน

3 เรียกว่า จำนวนจริง

$5i$ เรียกว่า จำนวนจินตภาพแท้

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อนแยกเป็น 2 กลุ่ม คือ จำนวนจริงกับจำนวนจินตภาพ สัญลักษณ์ (ตัวเลข) ที่ใช้แทนจำนวนเชิงซ้อน คือ $a+bi$ หรือ (a,b) หรือ.... (เชิงขั้ว)ถ้าส่วนจินตภาพเป็น 0 แล้ว $a+bi$ จะแทนจำนวนจริง เช่น $5+0i=5$ ถ้าส่วนจินตภาพไม่เป็น 0 แล้ว $a+bi$ จะแทนจำนวนจินตภาพ เช่น $0+7i=7i$

ต่อไปพิจารณาจำนวนเชิงซ้อน a,b สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $a+bi$

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อน $z=a+bi$ $=(a,b)$ จะถูกแบ่งเป็น 3 ลักษณะดังนี้

1) ถ้า $a=0$ และ $b\neq 0$ จะได้ $z=bi$ ซึ่งเป็นจำนวนจินตภาพ และเราเรียกจำนวนเชิงซ้อนในลักษณะเช่นนี้ว่า **จำนวนจินตภาพแท้**
2) ถ้า $a\neq 0$ และ $b=0$ จะได้ $z=a$ ซึ่งเป็นจำนวนจริง นั่นคือ จำนวนจริงทุกจำนวนต่างก็เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งไม่มีส่วนจินตภาพ
3) ถ้า $a\neq 0$ และ $b\neq 0$ จะได้ $z=a+bi$ ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มีทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพ

ตัวอย่าง 1 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a+bi$

1) จำนวนเชิงซ้อน (5,3) คือ $5-3i$
2) จำนวนเชิงซ้อน (3,-4) คือ $3-4i$
3) จำนวนเชิงซ้อน (2,0) คือ 2
4) จำนวนเชิงซ้อน (0,-1) คือ $-i$
5) จำนวนเชิงซ้อน (-7,-2) คือ $-7-2i$

ตัวอย่าง 2 จงบอกส่วนจริง $\mathrm{Re}(z)$ และส่วนจินตภาพ $\mathrm{Im}(z)$ ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ต่อไปนี้

1) จำนวนเชิงซ้อน (5,3) ส่วนจริง $\mathrm{Re}(z)$ คือ 5 ส่วนจินตภาพ $\mathrm{Im}(z)$ คือ 3
2) จำนวนเชิงซ้อน (3,–4) ส่วนจริง $\mathrm{Re}(z)$คือ 3 ส่วนจินตภาพ $\mathrm{Im}(z)$ คือ -4
3) จำนวนเชิงซ้อน (2,0) ส่วนจริง $\mathrm{Re}(z)$ คือ 2 ส่วนจินตภาพ $\mathrm{Im}(z)$ คือ 0
4) จำนวนเชิงซ้อน (0,–1) ส่วนจริง $\mathrm{Re}(z)$ คือ 0 ส่วนจินตภาพ $\mathrm{Im}(z)$ คือ -1
5) จำนวนเชิงซ้อน (–7,–2)ส่วนจริง $\mathrm{Re}(z)$คือ -7 ส่วนจินตภาพ $\mathrm{Im}(z)$ คือ -2

ตัวอย่าง 3 จงบอกส่วนจริง $\mathrm{Re}(z)$ และส่วนจินตภาพ $\mathrm{Im}(z)$ ของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $z=2+5i$ ส่วนจริง $\mathrm{Re}(z)$ คือ 2 ส่วนจินตภาพ $\mathrm{Im}(z)$ คือ 5

2) $z=5+\sqrt{3}i$ ส่วนจริง $\mathrm{Re}(z)$ คือ 5 ส่วนจินตภาพ $\mathrm{Im}(z)$คือ $\sqrt{3}$

3) $z=-4-3i$ ส่วนจริง $\mathrm{Re}(z)$คือ -4 ส่วนจินตภาพ $\mathrm{Im}(z)$คือ -3

4) $z=-8i$ ส่วนจริง $\mathrm{Re}(z)$ คือ 0 ส่วนจินตภาพ $\mathrm{Im}(z)$ คือ -8

เรียก z ว่าจำนวนจินตภาพแท้

5) $z=2\sqrt{5}$ ส่วนจริง $\mathrm{Re}(z)$คือ $2\sqrt{5}$ ส่วนจินตภาพ $\mathrm{Im}(z)$ คือ 0

ลิขสิทธิ์ของ สสวท

แบบฝึกทักษะที่ 1.2

1. ให้นักเรียนกาเครื่องหมายถูก (✓) ลงในตารางว่าจำนวนที่กำหนดให้เป็นจำนวนชนิดใด

ข้อ	โจทย์	จำนวนเชิงซ้อน	จำนวนจินตภาพแท้	จำนวนจริง	จำนวนตรรกยะ	จำนวนอตรรกยะ	จำนวนเต็ม
1	3						
2	-5						
3	$4i$						
4	$-7i$						
5	$\sqrt{3}$						
6	$-2-i$						
7	$3+i$						
8	$3-5i$						
9	$2+3i$						
10	$-5+7i$						

2. จงเขียนจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a+bi$

ตัวอย่าง $\sqrt{-5}=\sqrt{5}i$

$2i+\sqrt{9}=3+2i$

$\sqrt{4}+\sqrt{-7}=2+\sqrt{7}i$

2.1 $\sqrt{3}+\sqrt{-7}$ =.....

2.2 $5+\sqrt{-4}$ =.....

2.3 $\sqrt{-3}$ =.....

2.4 $\sqrt{2}+\sqrt{-9}$ =.....

2.5 $\sqrt{-5}+3$ =.....

3. จงบอกส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

จำนวนเชิงซ้อน	ส่วนจริง $\mathrm{Re}(z)$)	ส่วนจินตภาพ $\mathrm{Im}(z)$
ตัวอย่าง $(8,-5)$ $5+3i$	8 5	-5 3
1. $(5,8)$		
2. $(-4,2)$		
3. $7-3i$		
4. $3i^2$		
5. $7i$		
6. 2		
7. $-1-\sqrt{5}i$		
8. $a-5i$		
9. $1+i$		
10. $\sqrt{2}-i$		

4. จงเขียนจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a+bi$

ตัวอย่าง $(2,-5)$ เขียนให้อยู่ในรูป $a+bi$ คือ $2-5i$

$(0,-3)$ เขียนให้อยู่ในรูป $a+bi$ คือ $-3i$

3.1 $\left(0,\sqrt{2}\right)$ เขียนให้อยู่ในรูป $a+bi$ คือ .....

3.2 $(-3,4)$ เขียนให้อยู่ในรูป $a+bi$ คือ .....

3.3 $\left(-7,-\sqrt{2}\right)$ เขียนให้อยู่ในรูป $a+bi$ คือ .....

3.4 $(0,6)$ เขียนให้อยู่ในรูป $a+bi$ คือ .....

3.5 $(5,0)$ เขียนให้อยู่ในรูป $a+bi$ คือ .....

ใบความรู้ที่ 1.3

การเท่ากัน การบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม กำหนดให้ $z_1=(a,b)=a+bi$, $z_2=(c,d)=c+di$

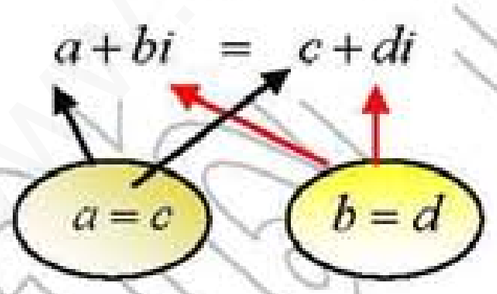
เมื่อ a และ b และกำหนดการเท่ากัน การบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อนเป็นดังนี้

1. การเท่ากัน $z_1=z_2$ ก็ต่อเมื่อ $a=c$ และ $b=d$
2. การบวก $z_1+z_2=(a+c,b+d)=(a+c)+(b+d)i$
3. การคูณ $z_1z_2=(ac-bd,ad+bc)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

อาจแทน $(a,b)\cdot(c,d)$ ด้วย $(a,b)(c,d)$ ก็ได้ และเซตของจำนวนเชิงซ้อนเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{C}$

จากบทนิยาม สรุปได้ว่า

1. จำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวนจะเท่ากันได้ ก็ต่อเมื่อ**ส่วนจริงเท่ากับส่วนจริง** และ **ส่วนจินตภาพเท่ากับส่วนจินตภาพ** ดังแผนภาพ



ข้อควรจำ

1. ถ้า $(a,b)\neq(c,d)$ หรือ $a+bi\neq c+di$ จะสรุปได้ว่า $a\neq c$ หรือ $b\neq d$
2. จำนวนเชิงซ้อนจะมีการเปรียบเทียบกันได้เฉพาะ **การเท่ากัน** หรือ **ไม่เท่ากัน** เท่านั้น ไม่มีการเปรียบเทียบกันเชิง**มากกว่าหรือน้อยกว่า** ยกเว้นส่วนจินตภาพเป็นศูนย์ ก็คือจำนวนจริงนั่นเองที่จะเปรียบเทียบกันในลักษณะนี้ได้
3. เราใช้พื้นฐานการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อนมาช่วยแก้หาตัวแปรที่เป็นองค์ประกอบของจำนวนเชิงซ้อน

ตัวอย่าง 1 ถ้า $x+3i=7+3i$ แล้ว x มีค่าเท่าใด

วิธีทำ จาก $x+3i=7+3i$

ให้ $z_1=x+3i$ และ $z_2=7+3i$ จากนิยาม $z_1=z_2$ ก็ต่อเมื่อ $a=c$ และ $b=d$

ดังนั้น $x=7$ ตอบ

ตัวอย่าง 2 ถ้า $3+5i=3+yi$ แล้ว y มีค่าเท่าใด

วิธีทำ จาก $3+5i=3+yi$

ให้ $z_1=3+5i$ และ $z_2=3+yi$ จากนิยาม $z_1=z_2$ ก็ต่อเมื่อ $a=c$ และ $b=d$

ดังนั้น $y=5$ ตอบ

ตัวอย่าง 3 กำหนดให้ $z_1=-3+i$ กับ $z_2=\sqrt{9}+i$ จงหาว่า $z_1=z_2$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ $z_1=-3+i$, $z_2=\sqrt{9}+i$

จะได้ว่า $\mathrm{Re}(z_1)=-3$, $\mathrm{Im}(z_1)=1$ และ

$\mathrm{Re}(z_2)=\sqrt{9}=3$, $\mathrm{Im}(z_2)=1$

ดังนั้น $\mathrm{Re}(z_1)\neq \mathrm{Re}(z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)=1$

นั่นคือ $z_1\neq z_2$ ตอบ

ตัวอย่าง 4 จงแสดงว่าจำนวนเชิงซ้อน $4+5i$ กับ $\sqrt{16}+\sqrt{25}i$ เท่ากันหรือไม่

วิธีทำ ให้ $z_1=4+5i$, $z_2=\sqrt{16}+\sqrt{25}i$

จะได้ว่า $\mathrm{Re}(z_1)=4$, $\mathrm{Im}(z_1)=5$ และ

$\mathrm{Re}(z_2)=\sqrt{16}=4$, $\mathrm{Im}(z_2)=\sqrt{25}=5$

ดังนั้น $\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)=4$, $\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)=5$

นั่นคือ $4+5i = \sqrt{16}+\sqrt{25}i$ ตอบ

ตัวอย่าง 5 ถ้า $(x+y)+i=5+(x-y)i$ จงหาค่าของ xy

วิธีทำ จาก $(x+y)+i=5+(x-y)i$

จะได้ว่า $x+y=5 \quad \rightarrow(1)$

$x-y=1 \quad \rightarrow(2)$

แก้ระบบสมการ นำ $(1)-(2)$ จะได้ $2y=4$

$y=2$

นำค่า $y=2$ แทนในสมการ (2) จะได้ $x-2=1$

$x=3$

ดังนั้น $xy=(3)(2)=6$ ตอบ

ตัวอย่าง 6 จงหาจำนวนจริง x และ y ที่ทำให้ $(1-i)+(x+yi)=-2+7i$

วิธีทำ จาก $(1-i)+(x+yi)=-2+7i$

$(1+x)+(y-1)i=-2+7i$

จะได้ $1+x=-2$ และ $y-1=7$

$x=-2-1$ $y=7+1$

$x=-3$ $y=8$

ดังนั้น $x=-3$ และ $y=8$ ตอบ

2. การหาผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน ทำได้โดย**นำส่วนจริงบวกกัน ส่วนจินตภาพบวกกัน**

3. การคูณจำนวนเชิงซ้อน $(a+bi)(c+di)$ อาจทำได้โดยการคูณเรียงไปแบบธรรมดานั่นเอง คือ $(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$

$=ac+(ad+bc)i-bd$ เนื่องจาก $i^2=-1$

แล้วจัดให้อยู่ในรูป $a+bi$

สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อนมีดังนี้

1. สมบัติปิด ก็ต่อเมื่อ $z_1 + z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ $z_1 z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน
2. สมบัติการสลับที่ ก็ต่อเมื่อ $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ และ $z_1 z_2 = z_2 z_1$
3. สมบัติการเปลี่ยนหมู่ ก็ต่อเมื่อ $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ และ $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
4. สมบัติการแจกแจง ก็ต่อเมื่อ $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

บทนิยาม การคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วยจำนวนจริง
ถ้า $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า
$kz = ka + kbi$ เป็นการนำ **จำนวนจริงไปคูณทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพ**

เช่น ให้ $z = 3 - 2i$ จงหาค่าของ $3z$ จะได้ว่า $3z = 9 - 6i$

ให้ $z = -10 + 2i$ จงหาค่าของ $\frac{1}{2}z$ จะได้ว่า $\frac{1}{2}z = -5 + i$ เป็นต้น

หมายเหตุ ถ้า $z = a + bi$

$$(-1)z = (-1)(a + bi) = -a - bi = -(a - bi) = -z$$

ดังนั้นเรานิยมเขียน $(-1)z = -z$

ตัวอย่าง 7 ถ้า $z_1 = (7, -3)$, $z_2 = (-5, -2)$ จงหาค่าของ $z_1 + z_2$ และ $z_1 z_2$

วิธีทำ จาก $z_1 + z_2 = (7 + (-5), (-3) + (-2))$ (ใช้หลักการนำส่วนจริงบวกกัน,ส่วนจินตภาพบวกกัน)

$$= (2, -5)$$

$z_1 z_2 = ((7)(-5) - (-3)(-2), (7)(-2) + (-3)(-5))$ (การคูณโดยใช้สูตร)

$$= ((-35) - 6, (-14) + 15)$$

$$= (-41, 1)$$ **ตอบ**

ตัวอย่าง 8 ถ้า $z_1 = 5+4i$, $z_2 = -7+3i$ จงหาค่าของ z_1+z_2 และ z_1z_2

วิธีทำ จาก $z_1+z_2 = (5+4i)+(-7+3i)$

$= (5+(-7))+(4+3)i$

$= -2+7i$ ตอบ

ข้อควรรู้

หลักการหาค่าของ z_1z_2 หาได้หลายวิธีนะจ๊ะ

วิธีที่ 1 $z_1z_2 = [(5)(-7)-(4)(3)]+[(5)(3)+(4)(-7)]i$ (การคูณโดยใช้สูตร)

$= [(-35)-12]+[15-28]i$

$= -47-13i$ ตอบ

วิธีที่ 2 $z_1z_2 = (5+4i)(-7+3i)$ (การคูณโดยใช้สูตรอีกวิธีหนึ่ง $ac+adi+bci+bdi^2$)

$= (-35)+15i+(-28i)+12i^2$

$= (-35)-13i+12(-1)$ (เนื่องจาก $i^2 = -1$)

$= -47-13i$ ตอบ

ตัวอย่าง 9 ถ้า $z_1 = 3+4i$, $z_2 = 3-\sqrt{-16}$ จงหาค่าของ $z_1 z_2$ และ $(z_1)^3$

วิธีทำ การหาค่าของ $z_1 z_2$

(วิธีที่ 1) จาก $z_1 z_2 = (3+4i)(3-\sqrt{-16})$

$= (3+4i)(3-4i)$

$= [(3)(3)-(4)(-4)]+[(3)(-4)+(4)(3)]i$

$= [9+16]+[-12+12]i$

ดังนั้น $z_1 z_2 = 25$ ตอบ

(วิธีที่ 2) จาก $z_1 z_2 = (3+4i)(3-\sqrt{-16})$

$= (3+4i)(3-4i)$

$= 9-12i+12i-16i^2$

$= 9+16(-1)$ (เนื่องจาก $i^2 = -1$)

ดังนั้น $z_1 z_2 = 25$ ตอบ

หาค่า $(z_1)^3 = (3+4i)^3$

$= [(3+4i)(3+4i)](3+4i)$

$= [(9-16)+(12+12)i](3+4i)$

$= (-7+24i)(3+4i)$

$= [(-21-96)+(-28+72)i]$

$= -117+44i$

ดังนั้น $(z_1)^3 = -117+44i$ ตอบ

แบบฝึกทักษะที่ 1.3

คำชี้แจง จงแสดงวิธีทำมาโดยละเอียด

1. จากโจทย์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาค่า x และ y

1.1 $(x,-5)=(7,y)$

1,2 $x-5yi=20i$

1.3 $(x+yi)+(3-5i)=2-3i$

1.4. $2x+yi=6$

1.5. $(x,y)+(-2,5)=(-1,-2)$

2. จากโจทย์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาค่า x และ y โดยแสดงวิธีทำมาโดยละเอียด

2.1 $(3x+4)+(2x+y)i=(y+5)+(x+3)i$

2.2 $(2x+9)+(9-2x)i=(2-3y)+(x-2y)i$

3. จงแสดงว่าจำนวนเชิงซ้อน $3-5i$ กับ $\sqrt{9}-\sqrt{25}i$ เท่ากันหรือไม่

4. จงหาค่าของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ต่อไปนี้

4.1 $(2,-1)+(-3,1)$

4.2 $(-4+2i)+(-2+3i)$

4.3. $(2,-3)(3,4)$

4.4. $(2+i)(5-3i)$

4.5. $(2+i)^3$

4.6 $(2+i)(1+3i)(i-4)$

www.kruinter.com

แบบทดสอบหลังเรียน

คำชี้แจง

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบหลังเรียนนี้เป็นแบบปรนัยเลือกตอบมี 4 ตัวเลือก มีจำนวน 10 ข้อ คะแนนเต็ม 10 คะแนน ใช้เวลาทำ 20 นาที

2. จงเลือกคำตอบที่ถูกที่สุดเพียงข้อละคำตอบเดียว แล้วทำเครื่องหมายกากบาท (×) ทับตัวอักษร ก , ข , ค หรือ ง ทำลงในกระดาษคำตอบ

4. เกณฑ์การให้คะแนน คือ ตอบถูกได้ 1 คะแนน , ตอบผิดได้ 0 คะแนน

1. ข้อใดต่อไปนี้**ไม่ถูกต้อง**

ก. $2\sqrt{-3}+7\sqrt{-27}=23\sqrt{3}i$ ข. $4\sqrt{-12}-5\sqrt{-3}=4\sqrt{3}i$

ค. $7\sqrt{-18}-2\sqrt{-2}=19\sqrt{2}i$ ง. $5\sqrt{-2}+2\sqrt{-8}=9\sqrt{2}i$

2. ข้อใดต่อไปนี้**ไม่ถูกต้อง**

ก. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}=-6$ ข. $\sqrt{-8}\sqrt{-125}=-10\sqrt{10}$

ค. $\dfrac{2\sqrt{-12}}{3\sqrt{-3}}=-\dfrac{4}{3}$ ง. $\dfrac{5}{\sqrt{-5}}=-\sqrt{5}i$

3. ค่าของ $i+i^2+i^3+...+i^{101}$ เท่ากับข้อใด

ก. -1 ข. 1

ค. $-i$ ง. i

4. กำหนดให้ $z=i^9+i^{10}+...+i^{126}$ เมื่อ $i^2=-1$ แล้วค่าของ z เท่ากับข้อใด

ก. $-1+i$ ข. $1+i$

ค. $-1-i$ ง. $1-i$

5. จงหาค่าของ $(4+3i)-(4-2i)$ เท่ากับข้อใด

ก. $-5i$ ข. $5i$

ค. 5 ง. -5

6. ให้ $z_1 = 2-5i$ และ $z_2 = 4+3i$ จงหาค่าของ $2z_1 - 4z_2$ เท่ากับข้อใด

ก. $-12-22i$ ข. $-12+22i$

ค. $12+22i$ ง. $12-22i$

7. ให้ $z_1 = 2-4i$, $z_2 = 6+3i$, $z_3 = 1+i$ จงหาค่าของ $(z_1 + 2z_2) + z_3$ เท่ากับข้อใด

ก. $15+3i$ ข. $15-3i$

ค. $15+11i$ ง. $15-11i$

8. ค่าของ $(2+3i)(-1+\sqrt{-1})$ เท่ากับข้อใด

ก. $-5+i$ ข. $-5-i$

ค. $1+i$ ง. $1-i$

9. ให้ $3-2i = (5p-q)+(p+5q)i$ จงหาค่า p และ q เท่ากับข้อใด

ก. $p=-\frac{1}{2}, q=-\frac{1}{2}$ ข. $p=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$

ค. $p=-\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$ ง. $p=\frac{1}{2}, q=-\frac{1}{2}$

10. ถ้า x และ y สอดคล้องกับสมการ $(2x+yi)(1+i) = -2+6i$ แล้ว $x+y$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 6 ข. 5

ค. 4 ง. 1

www.kroobannok.com

กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน
แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่องจำนวนเชิงซ้อน
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่มที่ 1 การสร้างจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....เลขที่.....ชั้น.....

คำชี้แจง จงเลือกตอบข้อที่ถูกที่สุดเพียงข้อละคำตอบเดียว แล้วให้นักเรียนกาเครื่องหมายกากบาท (x) ลงในช่องคำตอบที่เลือกให้ถูกต้อง

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

คะแนนเต็มของแบบทดสอบหลังเรียน	คะแนนที่ทำได้
10	

www.kroobannok.com

บรรณานุกรม

ณรงค์ ปั้นนิ่ม และคณะ. **คู่มือเตรียมสอบ สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์ PAT 1 ม.4-5-6**.กรุงเทพมหานคร : ภูมิบัณฑิตการพิมพ์.

ทรงวิทย์ สุวรรณาดา.**หนังสือ 1000 TESTS IN MATHS 2**. กรุงเทพมหานคร : แม็ค.

ธนวัฒน์(สันติ) สนทราพรพล. **แบบฝึกหัดและวิธีคิดเร็ว คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 4 ม.4-6**. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ธรรมบัณฑิต.

สมัย เหล่าวานิชย์ และ พัวพรรณ เหล่าวานิชย์. **หนังสือคณิตศาสตร์พื้นฐาน+เพิ่มเติม เล่ม 4 ม.4-6**. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ธีรพงษ์การพิมพ์.

สมัย เหล่าวานิชย์ และคณะ. **คณิตศาสตร์รวม ม.4-5-6**. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ธีรพงษ์การพิมพ์.

สถาบันกวดวิชา เดอะ เบรน. (2548). **เอกสารประกอบการเรียน คอร์ส ENTRANCE สายวิทย์ วิชาคณิตศาสตร์ 1 เล่ม 4**.(พิมพ์ครั้งที่ 1).กรุงเทพมหานคร : โรงเรียนเดอะ เบรน.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี,สถาบัน.(2553). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.4-6 เล่ม 4**.(พิมพ์ครั้งที่ 1).กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ สกสค.

สเถียร วิเชียรสาร. **เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม จำนวนเชิงซ้อน ม.5**.

อเนก หิรัญ. (2538). **หนังสือคณิตศาสตร์ 014** . กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.

www.kroobannok.com

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

ข้อที่	เฉลย
1	ค
2	ง
3	ข
4	ค
5	ก
6	ง
7	ข
8	ก
9	ค
10	ค

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.1

คำชี้แจง จงแสดงวิธีทำมาโดยละเอียด

1. จงหาค่าของ $\sqrt{-9}\sqrt{-25}$

วิธีทำ $\sqrt{-9}\sqrt{-25} = (\sqrt{9}i)(\sqrt{25}i)$

$= (3i)(5i)$

$= (15)(i^2)$

$= -15$ ตอบ

2. จงหาค่าของ $\sqrt{(-9)(-25)}$

วิธีทำ $\sqrt{(-9)(-25)} = \sqrt{225}$

$= 15$ ตอบ

3. จงหาค่า i^n **แต่ละข้อต่อไปนี้**

3.1 $i^{26} = -1$

3.2 $i^{88} = 1$

3.3 $i^{142} = -1$

3.4 $i^{1247} = -i$

3.5 $i^{1645} = i$

3.6 $i^{136} = 1$

3.7 $i^{400} = 1$

3.8 $i^{1254} = -1$

3.9. $i^{2468} = 1$

3.10. $i^{3001} = i$

4. จงหาค่าของ $i + i^2 + i^3 + ... + i^{2129}$

วิธีทำ พิจารณาการบวกเป็นชุด ๆ ดังนี้

$$i + i^2 + i^3 + i^4 = i + (-1) + (-i) + 1 = 0$$

$$i^5 + i^6 + i^7 + i^8 = i + (-1) + (-i) + 1 = 0$$

จะพบว่าแต่ละชุดมีผลบวกเท่ากับ 0 และเลขชี้กำลังของ i ตัวสุดท้ายต้องหารด้วย 4 ลงตัว

ดังนั้น เลขชี้กำลังของ i พจน์สุดท้ายในชุดสุดท้ายคือ 2128

นั่นคือ $i + i^2 + i^3 + ... + i^{2128} = 0$

จะได้ว่าค่าของ $i + i^2 + i^3 + ... + i^{2128} + i^{2129} = 0 + i$

$= i$ ตอบ

5. จงหาค่าของ $i + i^{35} + i^{125} + i^{1740} + i^{226}$

วิธีทำ $i + i^{35} + i^{125} + i^{1740} + i^{226} = i + (-i) + i + 1 + (-1)$

$= i$ ตอบ

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.2

1. ให้นักเรียนกาเครื่องหมายถูก (✓) ลงในตารางว่าจำนวนที่กำหนดให้เป็นจำนวนชนิดใด

ข้อ	โจทย์	จำนวนเชิงซ้อน	จำนวนจินตภาพแท้	จำนวนจริง	จำนวนตรรกยะ	จำนวนอตรรกยะ	จำนวนเต็ม
1	3	✓		✓	✓		✓
2	-5	✓		✓			✓
3	$4i$	✓	✓				
4	$-7i$	✓	✓				
5	$\sqrt{3}$	✓		✓		✓	
6	$-2-i$	✓					
7	$3+i$	✓					
8	$3-5i$	✓					
9	$2+3i$	✓					
10	$-5+7i$	✓					

2. จงเขียนจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a+bi$

ตัวอย่าง $\sqrt{-5}=\sqrt{5}i$

$2i+\sqrt{9}=3+2i$

$\sqrt{4}+\sqrt{-7}=2+\sqrt{7}i$

2.1 $\sqrt{3}+\sqrt{-7}=\sqrt{3}+\sqrt{7}i$

2.2 $5+\sqrt{-4}=5+2i$

2.3 $\sqrt{-3}=\sqrt{3}i$

2.4 $\sqrt{2}+\sqrt{-9}=\sqrt{2}+3i$

2.5 $\sqrt{-5}+3=3+\sqrt{5}i$

3. จงบอกส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

จำนวนเชิงซ้อน	ส่วนจริง $\mathrm{Re}(z)$)	ส่วนจินตภาพ $\mathrm{Im}(z)$
ตัวอย่าง $(8,-5)$	8	-5
$5+3i$	5	3
1. $(5,8)$	5	8
2. $(-4,2)$	-4	2
3. $7-3i$	7	-3
4. $3i^2$	-3	0
5. $7i$	0	7
6. 2	2	0
7. $-1-\sqrt{5}i$	-1	$-\sqrt{5}$
8. $a-5i$	a	-5
9. $1+i$	1	1
10. $\sqrt{2}-i$	$\sqrt{2}$	-1

4. จงเขียนจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a+bi$

ตัวอย่าง $(2,-5)$ เขียนให้อยู่ในรูป $a+bi$ คือ $2-5i$

$(0,-3)$ เขียนให้อยู่ในรูป $a+bi$ คือ $-3i$

3.1 $\left(0,\sqrt{2}\right)$ เขียนให้อยู่ในรูป $a+bi$ คือ $\sqrt{2}i$

3.2 $(-3,4)$ เขียนให้อยู่ในรูป $a+bi$ คือ $-3+4i$

3.3 $\left(-7,-\sqrt{2}\right)$ เขียนให้อยู่ในรูป $a+bi$ คือ $-7-\sqrt{2}i$

3.4 $(0,6)$ เขียนให้อยู่ในรูป $a+bi$ คือ $6i$

3.5 $(5,0)$ เขียนให้อยู่ในรูป $a+bi$ คือ 5

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.3

1. จากโจทย์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาค่า x และ y

1.1 $(x,-5)=(7,y)$

<u>วิธีทำ</u> จาก $(x,-5)=(7,y)$ โดยคุณสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

จะได้ $x=7$ และ $y=-5$

นั่นคือ $x=7$ และ $y=-5$ <u>ตอบ</u>

1.2 $x-5yi=20i$

<u>วิธีทำ</u> จาก $x-5yi=20i$ โดยคุณสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

จะได้ $x=0$ และ $5y=20$

$$y=\frac{20}{5}=4$$

ดังนั้น $x=0$ และ $y=4$ <u>ตอบ</u>

1.3 $(x+yi)+(3-5i)=2-3i$

<u>วิธีทำ</u> จาก $(x+yi)+(3-5i)=2-3i$

จะได้ $(x+3)+(y-5)i=2-3i$

นั่นคือ $x+3=2$ และ $y-5=-3$

$x=2-3$ $y=-3+5$

$x=-1$ $y=2$

ดังนั้น $x=-1$ และ $y=2$ <u>ตอบ</u>

1.4 $2x+yi=6$

<u>วิธีทำ</u> จาก $2x+yi=6$ โดยคุณสมบัติการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

จะได้ $2x=6$ และ $y=0$

$$x=\frac{6}{2}=3$$

ดังนั้น $x=3$ และ $y=0$ <u>ตอบ</u>

1.5 $(x,y)+(-2,5)=(-1,-2)$

<u>วิธีทำ</u> จาก $(x,y)+(-2,5)=(-1,-2)$

จะได้ $(x-2)+(y+5)=(-1,-2)$

นั่นคือ $x-2=-1$ และ $y+5=-2$

$x=-1+2$ $y=-2-5$

$x=1$ $y=-7$

ดังนั้น $x=3$ และ $y=0$ <u>ตอบ</u>

2. จากโจทย์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาค่า x และ y โดยแสดงวิธีทำมาโดยละเอียด

2.1 $(3x+4)+(2x+y)i=(y+5)+(x+3)i$

<u>วิธีทำ</u> จาก $(3x+4)+(2x+y)i=(y+5)+(x+3)i$

จะได้ $3x+4=y+5$

$3x-y=1 \rightarrow (1)$

$2x+y=x+3$

$x+y=3 \rightarrow (2)$

แก้ระบบสมการ นำ $(2)\times 3$ จะได้ $3x+3y=9 \rightarrow (3)$

นำ $(3)-(1)$ จะได้ $4y=8$

$y=\frac{8}{4}=2$

นำค่า $y=2$ แทนใน (1) จะได้ $3x-2=1$

$3x=1+2$

$x=1$

ดังนั้น $x=1$ และ $y=2$ <u>ตอบ</u>

2.2 $(2x+9)+(9-2x)i=(2-3y)+(x-2y)i$

<u>วิธีทำ</u> จาก $(2x+9)+(9-2x)i=(2-3y)+(x-2y)i$

จะได้ $2x+9=2-3y$

$2x+3y=-7 \quad \rightarrow(1)$

$9-2x=x-2y$

$3x-2y=9 \quad \rightarrow(2)$

แก้ระบบสมการ นำ $(1)\times 3$ จะได้ $6x+9y=-21 \quad \rightarrow(3)$

นำ $(2)\times 2$ จะได้ $6x-4y=18 \quad \rightarrow(4)$

นำ $(3)-(4)$ จะได้ $13y=-39$

$$y=\frac{-39}{13}=-3$$

นำ $y=-3$ แทนใน $2x+3(-3)=-7$

$2x=-7+9$

$$x=\frac{2}{2}=1$$

ดังนั้น $x=1$ และ $y=-3$ <u>ตอบ</u>

3. จงแสดงว่าจำนวนเชิงซ้อน $3-5i$ กับ $\sqrt{9}-\sqrt{25}i$ เท่ากันหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ให้ $z_1=3-5i \;,\; z_2=\sqrt{9}-\sqrt{25}i$

จะได้ว่า $\mathrm{Re}(z_1)=3 \;,\; \mathrm{Im}(z_1)=-5$ และ

$\mathrm{Re}(z_2)=\sqrt{9}=3 \;,\; \mathrm{Im}(z_2)=-\sqrt{25}=-5$

ดังนั้น $\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)=3$

$\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)=-5$

จะได้ว่า $z_1=z_2$

นั่นคือ $3-5i = \sqrt{9}-\sqrt{25}i$ <u>ตอบ</u>

www.kruobanok.com

4.จงหาค่าของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ต่อไปนี้

4.1 $(2,-1)+(-3,1)$

<u>วิธีทำ</u> จาก $(2,-1)+(-3,1)=(2+(-3),(-1+1))$

$=(-1,0)$

ดังนั้น $(2,-1)+(-3,1)=(-1,0)$ <u>ตอบ</u>

4.2 $(-4+2i)+(-2+3i)$

<u>วิธีทำ</u> จาก $(-4+2i)+(-2+3i)=[(-4)+(-2)]+[2+3]\,i$

$=-6+5i$

ดังนั้น $(-4+2i)+(-2+3i)=-6+5i$ <u>ตอบ</u>

4.3 $(2,-3)(3,4)$

<u>วิธีทำ</u> จาก $(2,-3)(3,4)=(6-(-12),8+(-9))$

$=(18,-1)$

ดังนั้น $(2,-3)(3,4)=(18,-1)$ <u>ตอบ</u>

4.4. $(2+i)(5-3i)$

<u>วิธีทำ</u> จาก $(2+i)(5-3i)=[10-(-3)]+[(-6)+5]i$

$=13-i$

ดังนั้น $(2+i)(5-3i)=13-i$ <u>ตอบ</u>

4.5 $(2+i)^3$

<u>วิธีทำ</u> จาก $(2+i)^3=[(2+i)(2+i)](2+i)$

$=[(4)-1]+[2+2]i(2+i)$

$=(3+4i)(2+i)$

$=[(6)-4]+[3+4]i$

$=2+7i$

ดังนั้น $(2+i)^3=2+7i$ <u>ตอบ</u>

4.6 $(2+i)(1+3i)(i-4)$

<u>วิธีทำ</u> จาก $(2+i)(1+3i)(i-4)$

จะได้ $(2+i)(1+3)=(2-3)+(6+1)i$

$=-1+7i$

แทนค่าใน $(2+i)(1+3i)(i-4)=(-1+7i)(i-4)$

$=(-1-(-28))+(4+7)i$

$=27+11i$

ดังนั้น $(2+i)(1+3i)(i-4)$ $=27+11i$ <u>ตอบ</u>

www.kroobannok.com

ข้อที่	เฉลย
1	ข
2	ค
3	ง
4	ก
5	ข
6	ก
7	ก
8	ข
9	ง
10	ข

ได้คะแนนเท่าไหร่จ๊ะ...
แล้วให้นำคะแนนหลังเรียนไปเปรียบเทียบ
กับคะแนนการทดสอบก่อนเรียน
เพื่อเปรียบเทียบดูผลการพัฒนาน่ะค่ะ

www.krooban.com

แบบบันทึกผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจากแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่องจำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)
เล่มที่ 1 การสร้างจำนวนเชิงซ้อน

ชื่อ.....เลขที่.....ชั้น.....

โรงเรียนคลองลานวิทยา อำเภอคลองลาน จังหวัดกำแพงเพชร

1. แบบทดสอบ

แบบทดสอบ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ทำได้	หมายเหตุ
ก่อนเรียน	10		
หลังเรียน	10		
ผลการพัฒนา			

หมายเหตุ ผลการพัฒนา = $\frac{\text{(คะแนนหลังเรียน-คะแนนก่อนเรียน)} \times 100}{\text{คะแนนเต็ม}}$

2. แบบฝึกทักษะ

แบบฝึกทักษะที่	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ทำได้	หมายเหตุ
1.1			
1.2			
1.3			
รวม			
ค่าเฉลี่ย			
ร้อยละ			

ลงชื่อ.....ผู้บันทึก

(.....)

ข้อมูลผู้จัดทำ

ชื่อ-สกุล นางดาวัลย์ ภูวดล
วันเดือนปีเกิด วันอังคาร ที่ 10 กันยายน พ.ศ. 2517
ที่อยู่ปัจจุบัน 733/1 หมู่ 22 ตำบลคลองน้ำไหล อำเภอคลองลาน จังหวัดกำแพงเพชร
ที่อยู่ที่ติดต่อได้สะดวก โรงเรียนคลองลานวิทยา เลขที่ 145 หมู่ 18 ตำบลคลองน้ำไหล
อำเภอคลองลาน จังหวัดกำแพงเพชร 62180 โทร. 084-5776560

ประวัติการศึกษา

ปี พ.ศ. ที่จบ	จบการศึกษาระดับ	สถานศึกษา
2535	มัธยมศึกษาปีที่ 6	โรงเรียนคลองลานวิทยา
2539	ปริญญาตรี ค.บ.คณิตศาสตร์ วิชาโท คอมพิวเตอร์	สถาบันราชภัฏกำแพงเพชร
2544	ปริญญาโท กศ.ม.คณิตศาสตร์	มหาวิทยาลัยนเรศวร

ประวัติการทำงาน

วัน เดือน ปี	ตำแหน่ง	สถานที่ทำงาน
1 พ.ค. 2539 – 30 ก.ย. 2540	ครูอัตราจ้างสอนพิเศษ	สถาบันราชภัฏกำแพงเพชร อำเภอเมือง จังหวัดกำแพงเพชร
13 ก.ย. 2539	อาจารย์ 1 ระดับ 3	โรงเรียนผดุงปัญญานาโบสถ์ ปัจจุบันคือ โรงเรียนนาโบสถ์พิทยาคม จังหวัดตาก
1 พ.ย. 2540	อาจารย์ 1 ระดับ 3	โรงเรียนคลองลานพัฒนาจินดาศักดิ์ อำเภอคลองลาน จังหวัดกำแพงเพชร
15 มิ.ย. 2546	อาจารย์ 2	โรงเรียนคลองลานวิทยา อำเภอคลองลาน จังหวัดกำแพงเพชร
ปัจจุบัน	ครู อันดับ คศ.2	โรงเรียนคลองลานวิทยา อำเภอคลองลาน จังหวัดกำแพงเพชร

www.kroobannok.com