

ชุดฝึกทักษะคณิตศาสตร์

เรื่อง ภาศัตถกรอย

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม2 รหัสวิชา ค31202

ชุดฝึกทักษะที่ 1

ววกกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$



นางสาวลักษณ พลศรี

โรงเรียนขุนยวมวิทยา อำเภอขุนยวม จังหวัดแม่ฮ่องสอน

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 34

คำนำ

ชุดฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ชุดที่ 1 เรื่อง วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ มีเนื้อหาสาระเกี่ยวกับการหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมและการหาส่วนประกอบของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ กิจกรรมที่ใช้ในการเสริมสร้างทักษะ โดยใช้รูปแบบการเรียนรู้แบบร่วมมือ (Cooperative Learning) ซึ่งประกอบด้วย กิจกรรมทบทวนความรู้ ใบความรู้ ใบงาน แบบทดสอบย่อยระหว่างเรียนและแบบทดสอบหลังเรียนด้วยชุดฝึกทักษะที่ 1 นักเรียนสามารถใช้ชุดฝึกทักษะทั้งในชั้นเรียนและศึกษาเพิ่มเติมด้วยตนเองได้

ในการจัดทำชุดฝึกทักษะได้สำเร็จล่วงไปด้วยดีนี้ ได้รับการสนับสนุนส่งเสริมจากผู้อำนวยการ รองผู้อำนวยการ ผู้เชี่ยวชาญ หัวหน้ากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์และคณะครู นักเรียน โรงเรียน ขุนยวมวิทยา ขอขอบพระคุณทุกท่านที่ได้นำชุดฝึกทักษะไปทดลองใช้ พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะและคำแนะนำจนทำให้ชุดฝึกทักษะคณิตศาสตร์สำเร็จสมบูรณ์

ผู้สอนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า ชุดฝึกทักษะเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ในเรื่อง ภาคตัดกรวย ทำให้ผู้เรียนเกิดทักษะกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์และการทำงานร่วมกันอย่างมีประสิทธิภาพ

เสาวลักษณ์ พลศรี

สารบัญ

หน้า

คำนำ	ก
สารบัญ	ข
หลักการและองค์ประกอบของชุดฝึกทักษะ	ค
สาระสำคัญ	1
วัตถุประสงค์การเรียนรู้	1
สาระการเรียนรู้	1
ระยะเวลาที่ใช้	2
กิจกรรมการเรียนรู้	2
สื่อ/อุปกรณ์/แหล่งเรียนรู้	3
การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้	4
ทบทวนความรู้	5
ใบความรู้ที่ 1.1 การหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง ที่ (0, 0)	15
-ใบงานที่ 1.1	23
-ใบงานที่ 1.2	28
-แบบทดสอบที่ 1.1	33
ใบความรู้ที่ 1.2 การหาส่วนประกอบของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0)	36
-ใบงานที่ 1.3	38
-ใบงานที่ 1.4	43
-ใบงานที่ 1.5	47
-แบบทดสอบที่ 1.2	48
กิจกรรมเสนอแนะ	51
แบบทดสอบหลังเรียน	53
บรรณานุกรม	57



หลักการและองค์ประกอบของชุดฝึกทักษะ

ชุดฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาควัตถุกรวย สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จัดทำขึ้น โดยใช้รูปแบบการเรียนรู้แบบร่วมมือ (Cooperative Learning) มีรายละเอียดดังนี้

- ขั้นที่ 1 ขั้นชี้แจงวัตถุประสงค์
- ขั้นที่ 2 ขั้นให้ข้อมูล
- ขั้นที่ 3 ขั้นจัดนักเรียนเป็นกลุ่ม
- ขั้นที่ 4 ขั้นให้ความช่วยเหลือ
- ขั้นที่ 5 ขั้นทดสอบ
- ขั้นที่ 6 ขั้นให้การเสริมแรง

จากรูปแบบการเรียนรู้แบบร่วมมือ ผู้เขียนได้จัดทำชุดฝึกทักษะโดยให้นักเรียนศึกษาตาม ขั้นตอน คือ เริ่มจากให้นักเรียนทบทวนความรู้ ศึกษาวัตถุประสงค์ของการเรียน ศึกษากิจกรรมและ เนื้อหาจากใบความรู้ โดยนักเรียนศึกษาและทำกิจกรรมการเรียนรู้เป็นกลุ่ม มีการทดสอบความรู้และ ครูเสริมแรงในการทำกิจกรรม ในหน่วยการเรียนรู้เรื่อง ภาควัตถุกรวย ได้จัดทำชุดฝึกทักษะทั้งหมด 4 ชุด เพื่อฝึกทักษะ ดังนี้

ชุดฝึกทักษะที่ 1 เรื่อง วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ มีกิจกรรมฝึกทักษะ 5 ใบงาน คือ ใบงานที่ 1.1

การหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม

ใบงานที่ 1.2 กิจกรรมเสริมนอกเวลาเรียน(การหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม)
แบบทดสอบที่ 1.1 การหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$

ใบงานที่ 1.3 การหาส่วนประกอบของวงกลม

ใบงานที่ 1.4 กิจกรรมเสริมนอกเวลาเรียน (การหาส่วนประกอบของวงกลม)

ใบงานที่ 1.5 การเขียนกราฟของวงกลมโดยใช้โปรแกรม GSP

แบบทดสอบที่ 1.2 การหาส่วนประกอบของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$

กิจกรรมเสนอแนะสำหรับนักเรียนที่คะแนนไม่ผ่านเกณฑ์และคนเก่ง

แบบทดสอบหลังเรียน(Post-Test)

ชุดฝึกทักษะที่ 2 เรื่อง พาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(0, 0)$ มีกิจกรรมฝึกทักษะ 5 ใบงาน คือ

ใบงานที่ 2.1 การหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลา เมื่อ แกนพาราโบลา
คือ แกน x

ใบงานที่ 2.2 การหาส่วนประกอบของพาราโบลา เมื่อ แกนพาราโบลา
คือ แกน x

ใบงานที่ 2.3 การหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นพาราโบลา เมื่อ แกนพาราโบลา
คือ แกน y

ใบงานที่ 2.4 การหาส่วนประกอบของพาราโบลา เมื่อ แกนพาราโบลา
คือ แกน y

ใบงานที่ 2.5 การเขียนกราฟของพาราโบลาโดยใช้โปรแกรม GSP
กิจกรรมเสนอแนะสำหรับนักเรียนที่คะแนนไม่ผ่านเกณฑ์และคนเก่ง
แบบทดสอบหลังเรียน(Post-Test)

ชุดฝึกทักษะที่ 3 เรื่อง วงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ มีแบบฝึกทักษะย่อย 4 แบบฝึก คือ

ใบงานที่ 3.1 การหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงรี เมื่อแกนเอกอยู่บนแกน x

ใบงานที่ 3.2 การหาส่วนประกอบของวงรี เมื่อแกนเอกอยู่บนแกน x

ใบงานที่ 3.3 การหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงรี เมื่อแกนเอกอยู่บนแกน y

ใบงานที่ 3.4 การหาส่วนประกอบของวงรี เมื่อแกนเอกอยู่บนแกน y

ใบงานที่ 3.5 การเขียนกราฟของวงรีโดยใช้โปรแกรม GSP

กิจกรรมเสนอแนะสำหรับนักเรียนที่คะแนนไม่ผ่านเกณฑ์และคนเก่ง
แบบทดสอบหลังเรียน(Post-Test)

ชุดฝึกทักษะที่ 4 เรื่อง ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ มีแบบฝึกทักษะย่อย 4 แบบฝึก คือ

ใบงานที่ 4.1 การหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา เมื่อแกนตามขวาง
อยู่บนแกน x

ใบงานที่ 4.2 การหาส่วนประกอบของไฮเพอร์โบลา เมื่อแกนตามขวาง
อยู่บนแกน x

ใบงานที่ 4.3 การหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา เมื่อแกนตามขวาง
อยู่บนแกน y

ใบงานที่ 4.4 การหาส่วนประกอบของไฮเพอร์โบลา เมื่อแกนตามขวาง
อยู่บนแกน y

ใบงานที่ 4.5 การเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาโดยใช้โปรแกรม GSP
กิจกรรมเสนอแนะสำหรับนักเรียนที่คะแนนไม่ผ่านเกณฑ์และคนเก่ง
แบบทดสอบหลังเรียน(Post-Test)

หมายเหตุ ใบงานและกิจกรรมในแต่ละชุดฝึกทักษะที่ให้นักเรียนทำ มีเฉลยใบงานและกิจกรรมตาม
เกณฑ์การให้คะแนนแยกไว้ต่างหาก เพื่อให้นักเรียนนำไปใช้เทียบในการตรวจและเฉลย
หลังจากนักเรียนทำใบงานในแต่ละชุดฝึกทักษะเสร็จสิ้น

สาระสำคัญ

วงกลม (circle) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (center) ของวงกลม และระยะทางคงตัวดังกล่าวเรียกว่า รัศมี (radius) ของวงกลม

วัตถุประสงค์การเรียนรู้

1. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมให้ สามารถหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟของวงกลมได้
2. เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่าง ๆ ให้ สามารถเขียนความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมได้

สาระการเรียนรู้

1. ความหมายของวงกลม
2. ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$

ระยะเวลาที่ใช้

4 ชั่วโมง

กิจกรรมการเรียนรู้

กิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้ชุดฝึกทักษะชุดที่ 1 วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ ใช้รูปแบบการเรียนรู้แบบร่วมมือ (Cooperative Learning) มีรายละเอียดดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นชี้แจงวัตถุประสงค์

นักเรียนศึกษาวัตถุประสงค์ของการเรียนเรื่อง วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ ให้เข้าใจ

ขั้นที่ 2 ขั้นให้ข้อมูล

นักเรียนศึกษาใบความรู้ เรื่อง วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ โดยแยกเป็น

2.1 นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 1.1 เรื่อง การหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ ซักถามในเรื่องที่ยังไม่เข้าใจโดยครูให้คำแนะนำทำใบงานที่ 1.1 – 1.2 และทำแบบทดสอบที่ 1.1

2.2 นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 1.2 เรื่องการหาส่วนประกอบของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ ซักถามในเรื่องที่ยังไม่เข้าใจโดยครูให้คำแนะนำ ทำใบงานที่ 1.3-1.5 และทำแบบทดสอบที่ 1.2

ขั้นที่ 3 ขั้นจัดนักเรียนเป็นกลุ่ม

3.1 นักเรียนจัดกลุ่มกลุ่มละ 4 คน โดยให้นักเรียนละความสามารถ คละเพศ

3.2 นักเรียนแต่ละกลุ่มปฏิบัติใบงานที่ 1.1, ใบงานที่ 1.3 และใบงานที่ 1.5 เรื่องวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ โดยนักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาหัวข้อที่ได้รับ

3.3 นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันทำใบงานที่ 1.5 โดยการปฏิบัติงานครั้งนี้ทำลงในคอมพิวเตอร์ ใช้โปรแกรมคณิตศาสตร์ GSP

3.4 ทุกกลุ่มนำเสนองานที่ได้รับโดยโปรแกรม GSP นักเรียนในห้องซักถามกลุ่มที่นำเสนอ

ขั้นที่ 4 ขั้นให้ความช่วยเหลือ

เมื่อนักเรียนมีข้อสงสัยในเรื่อง วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ ให้ขอคำแนะนำจาก ครูผู้สอนทันที

ขั้นที่ 5 ขั้นทดสอบ

ทดสอบหลังเรียนจบเรื่องวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ นำคะแนนที่ได้มาคิดเป็น คะแนนของกลุ่มและจะเป็นคะแนนของสมาชิกทุกคนในกลุ่ม

ขั้นที่ 6 ขั้นให้การเสริมแรง

กลุ่มที่ได้คะแนนมากที่สุด จะได้รับคำชมเชยจากครู

สื่อ / อุปกรณ์ / แหล่งเรียนรู้

สื่อการเรียนรู้ประกอบการเรียนด้วยชุดฝึกทักษะที่ 1 วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ เป็น สื่อประสม ได้แก่

1. คอมพิวเตอร์
2. ใบความรู้ที่ 1.1 – 1.2
3. ใบงาน ที่ 1.1 – 1.5
4. กิจกรรมเสนอแนะสำหรับนักเรียนที่คะแนนไม่ผ่านเกณฑ์และคนเก่ง

การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดและประเมินผล ชุดฝึกทักษะที่ 1 วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ ทำการวัดโดย

1. การวัดและประเมินผลระหว่างเรียน

- 1.1 ใบงาน ที่ 1.1 การหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$
- 1.2 ใบงานที่ 1.2 กิจกรรมเสริมนอกเวลาเรียน(การหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม)
- 1.3 ใบงาน ที่ 1.3 การหาส่วนประกอบของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$
- 1.4 ใบงานที่1.4 กิจกรรมเสริมนอกเวลาเรียน (การหาส่วนประกอบของวงกลม)
- 1.5 ใบงานที่ 1.5 การเขียนกราฟของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ ด้วยโปรแกรมGSP
- 1.6 แบบทดสอบระหว่างเรียน แบบทดสอบที่ 1.1 - 1.2

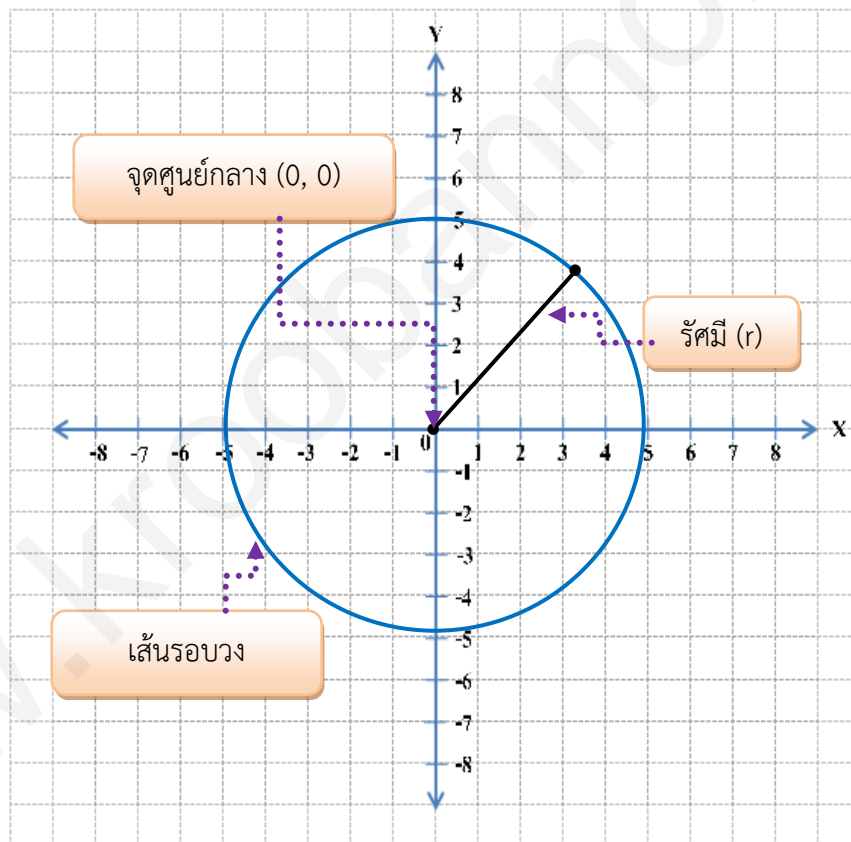
2. การวัดและประเมินผลหลังเรียน

แบบทดสอบหลังเรียน เรื่อง วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$

ทบทวนความรู้

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับวงกลม (circle)

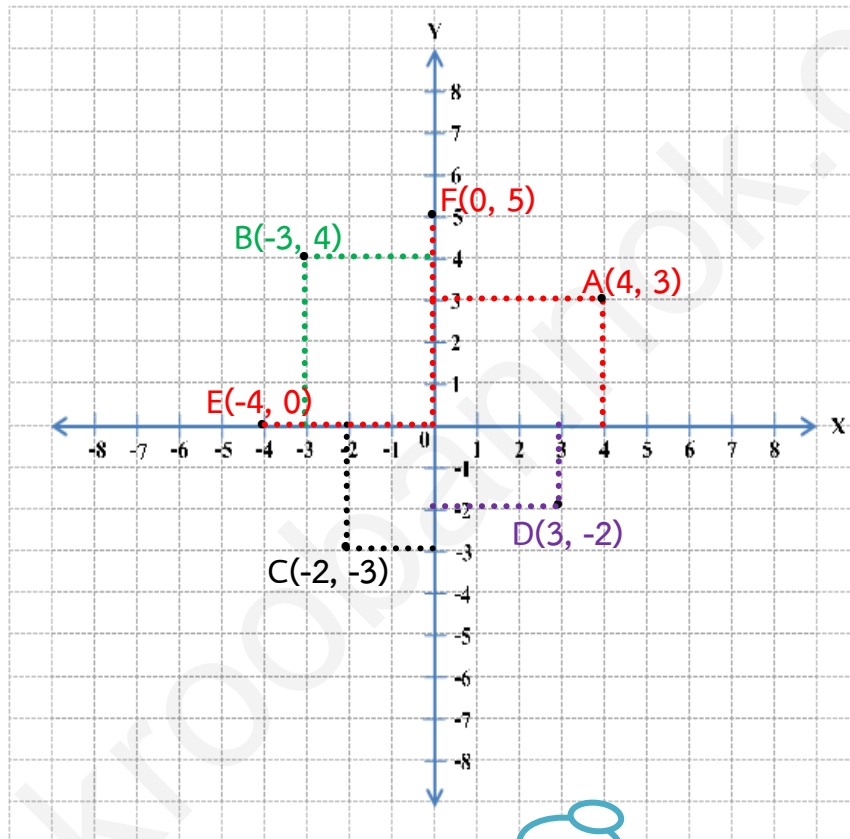
วงกลม เป็นรูปเรขาคณิตบนระนาบซึ่งแต่ละจุดบนรูปเรขาคณิตนี้ อยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง บนระนาบเดียวกันเป็นระยะเท่ากัน เรียกจุดคงที่นี้ว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม เรียกระยะที่เท่ากันนี้ว่า รัศมีของวงกลม ส่วนต่างๆเกี่ยวกับวงกลมที่นักเรียนเคยรู้จักมาแล้วมีดังนี้



การเขียนกราฟ

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนพิกัดของ A(4, 3), B(-3, 4), C(-2, -3), D(3, -2), E(-4, 0), F(0, 5) และ G(7, 0) ลงบนตารางกราฟ

วิธีทำ



การลงพิกัดจุด (x, y) ใดๆ จะนับระยะจาก 0 ถึงค่า x ตามแนวแกน x แล้วนับระยะจาก 0 ถึงค่า y ตามแนวแกน y แล้วลากเส้นขนานกับแกน x และแกน y ได้จุดตัดของเส้นตรงเป็นพิกัดของ (x, y) นั้นเอง

ตัวอย่างที่ 2

จงเขียนกราฟของสมการ $2x + y = 3$

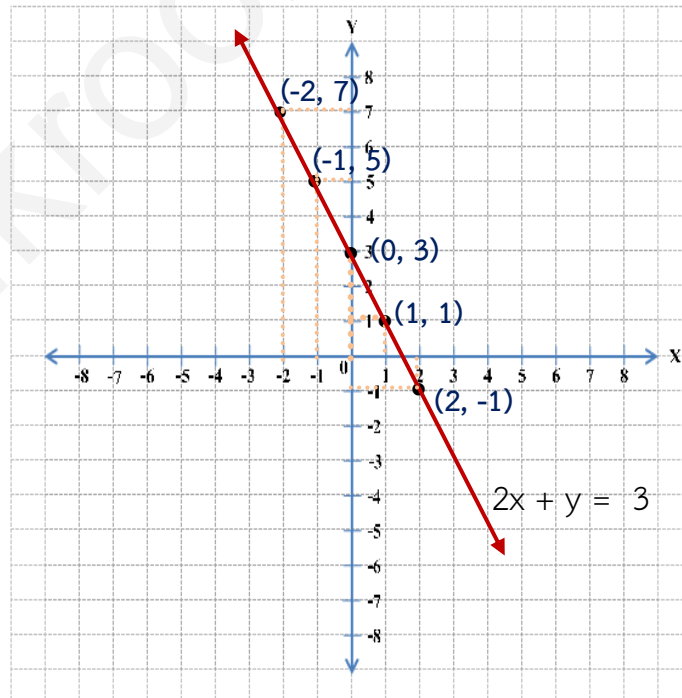
วิธีทำ ขั้นตอนการเขียนกราฟ มีดังนี้

1. จัดรูปสมการใหม่ จาก $2x + y = 3$ เขียนได้เป็น $y = 3 - 2x$
2. กำหนดค่า x และ y ให้สอดคล้องกับสมการ $y = 3 - 2x$

จากสมการ $y = 3 - 2x$ (กำหนดค่า x แล้วหาค่า y)ถ้า $x = -2$ แทนค่าในสมการ จะได้ $y = 3 - 2(-2) = 3 + 4 = 7$ ถ้า $x = -1$ แทนค่าในสมการ จะได้ $y = 3 - 2(-1) = 3 + 2 = 5$ ถ้า $x = 0$ แทนค่าในสมการ จะได้ $y = 3 - 2(0) = 3 - 0 = 3$ ถ้า $x = 1$ แทนค่าในสมการ จะได้ $y = 3 - 2(1) = 3 - 2 = 1$ ถ้า $x = 2$ แทนค่าในสมการ จะได้ $y = 3 - 2(2) = 3 - 4 = -1$ ได้ค่า (x, y) ดังตาราง

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3 - 2x$	7	5	3	1	-1

3. ลงพิกัดของจุด $(-2, 7)$, $(-1, 5)$, $(0, 3)$, $(1, 1)$, $(2, -1)$ แล้วลากเส้นกราฟ ดังรูป



ตัวอย่างที่ 3

จงเขียนกราฟของสมการ $x^2 + y^2 = 1$

วิธีทำ ขั้นตอนการเขียนกราฟ มีดังนี้

กำหนดค่า x และ y ที่ทำให้สมการเป็นจริง

$$\text{ถ้า } x = 0 \text{ และ } y = 1 \text{ แทนค่าในสมการ จะได้ } 0^2 + 1^2 = 1$$

$$\text{ถ้า } x = 0 \text{ และ } y = -1 \text{ แทนค่าในสมการ จะได้ } 0^2 + (-1)^2 = 1$$

$$\text{ถ้า } x = 1 \text{ และ } y = 0 \text{ แทนค่าในสมการ จะได้ } 1^2 + 0^2 = 1$$

$$\text{ถ้า } x = -1 \text{ และ } y = 0 \text{ แทนค่าในสมการ จะได้ } (-1)^2 + 0^2 = 1$$

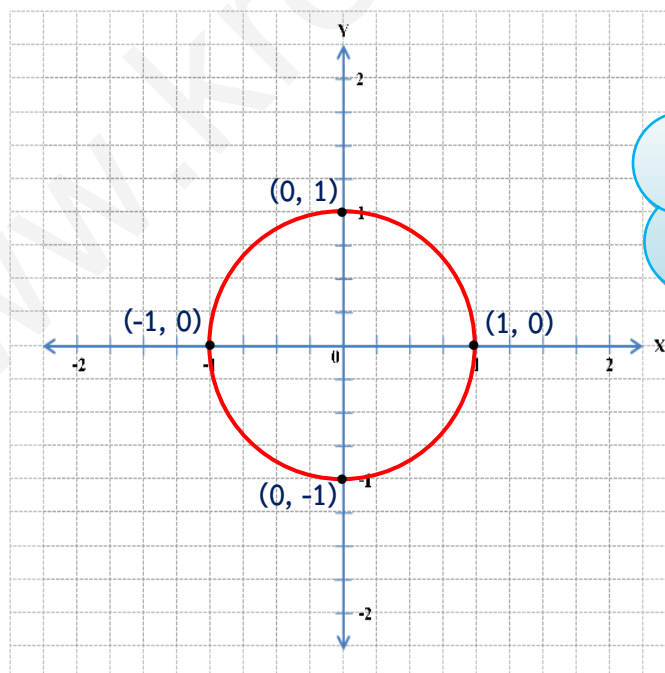
$$\text{ถ้า } x = \frac{1}{2} \text{ และ } y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ แทนค่าในสมการ จะได้ } \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\text{ถ้า } x = -\frac{1}{2} \text{ และ } y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ แทนค่าในสมการ จะได้ } \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

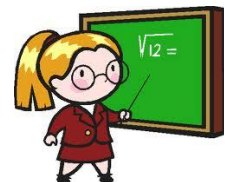
(มีจำนวนจริง x และ y อีกมากมายนับไม่ถ้วนที่ทำให้สมการเป็นจริง)

ยกตัวอย่างคู่อันดับเพื่อนำไปเขียนกราฟ ดังตารางต่อไปนี้

x	-1	0	1
y	0	1, -1	0

ลงพิกัดของจุด $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ แล้วลากเส้นกราฟ ดังรูป

ถ้าเป็นไปได้ควร
กำหนดค่า x และ y
เป็นจำนวนเต็มเพื่อให้
ว่าสอดคล้องกับเขียนกราฟ



ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น

1. การหาระยะระหว่างจุดสองจุด

ถ้า $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดสองจุดใดๆ บนระนาบแล้ว

$$P_1 P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ตัวอย่าง

จงหาระยะระหว่างจุด $P_1(1, -5)$ และ $P_2(5, -2)$

วิธีทำ

$$\text{จาก } P_1 P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\text{แทนค่า } P_1 P_2 = \sqrt{(1 - 5)^2 + ((-5) - (-2))^2}$$

$$= \sqrt{(1 - 5)^2 + ((-5) + 2)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$$

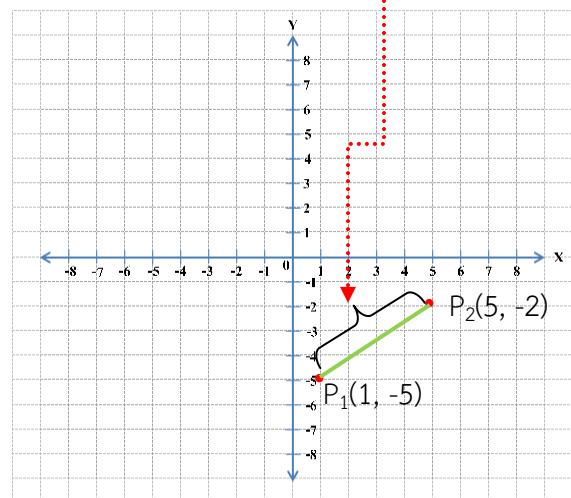
$$= \sqrt{16 + 9}$$

$$= \sqrt{16 + 9}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5$$

ระยะระหว่าง P_1 และ P_2



ดังนั้น ระยะห่างระหว่าง P_1 และ P_2

เท่ากับ 5 หน่วย



2. จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด

ถ้า $P(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ แล้ว

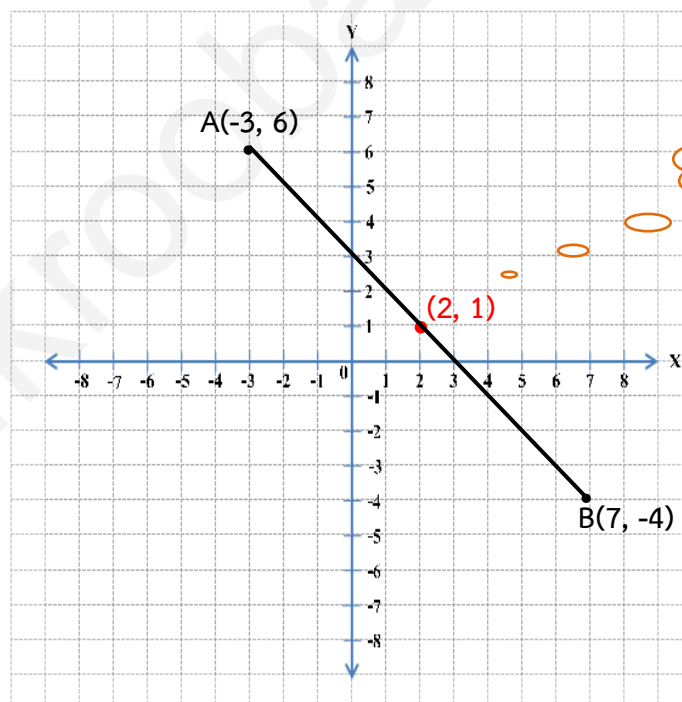
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

ตัวอย่าง จงหาจุดกึ่งกลางของ \overline{AB} เมื่อกำหนด $A(-3, 6)$ และ $B(7, -4)$

วิธีทำ ให้จุดกึ่งกลางของ $A(-3, 6)$ และ $B(7, -4)$ คือ (\bar{x}, \bar{y})

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า} \quad \bar{x} &= \frac{(-3) + 7}{2}, & \bar{y} &= \frac{6 + (-4)}{2} \\ &= \frac{4}{2} & &= \frac{2}{2} \\ &= 2 & &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น จุดกึ่งกลางของ \overline{AB} คือ $(2, 1)$



จุดกึ่งกลาง



3. ระยะระหว่างเส้นตรงกับจุด

ระยะระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ เมื่อ A, B และ C เป็นค่าคงตัว

กับ จุด $P(x_1, y_1)$ คือ
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ตัวอย่าง

จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง $3x + 4y = 10$ กับจุด $(-2, -1)$

วิธีทำ

จาก

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

จากโจทย์ สมการเส้นตรง คือ $3x + 4y = 10$

จัดให้อยู่ในรูป $3x + 4y - 10 = 0$

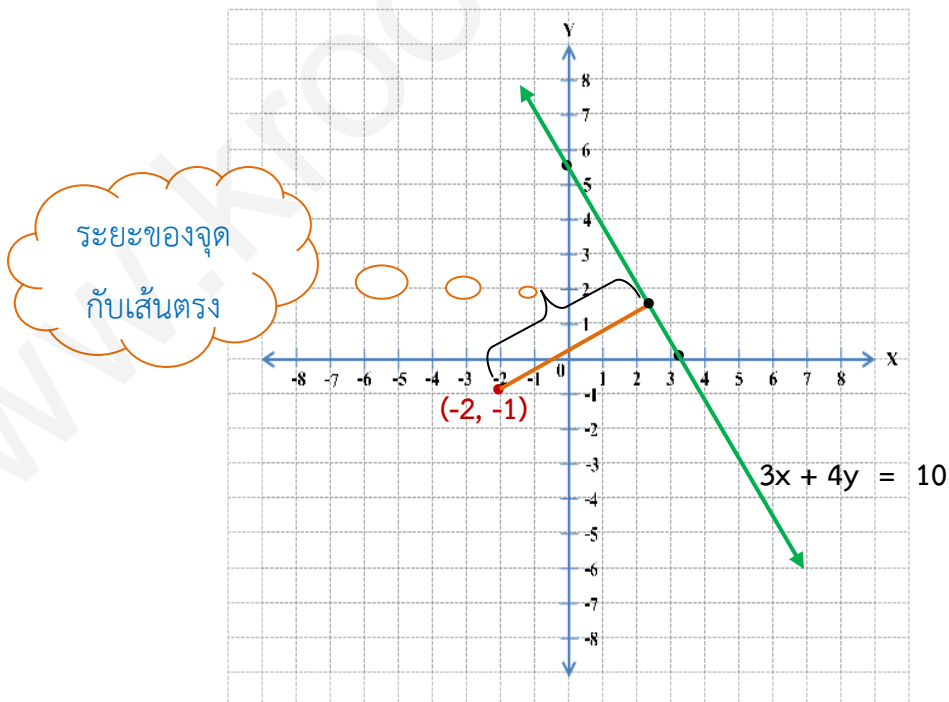
จะได้ว่า $A = 3$, $B = 4$, $C = -10$

และจุด $(-2, -1)$ จะได้ว่า $x_1 = -2$, $y_1 = -1$

แทนค่าจะได้

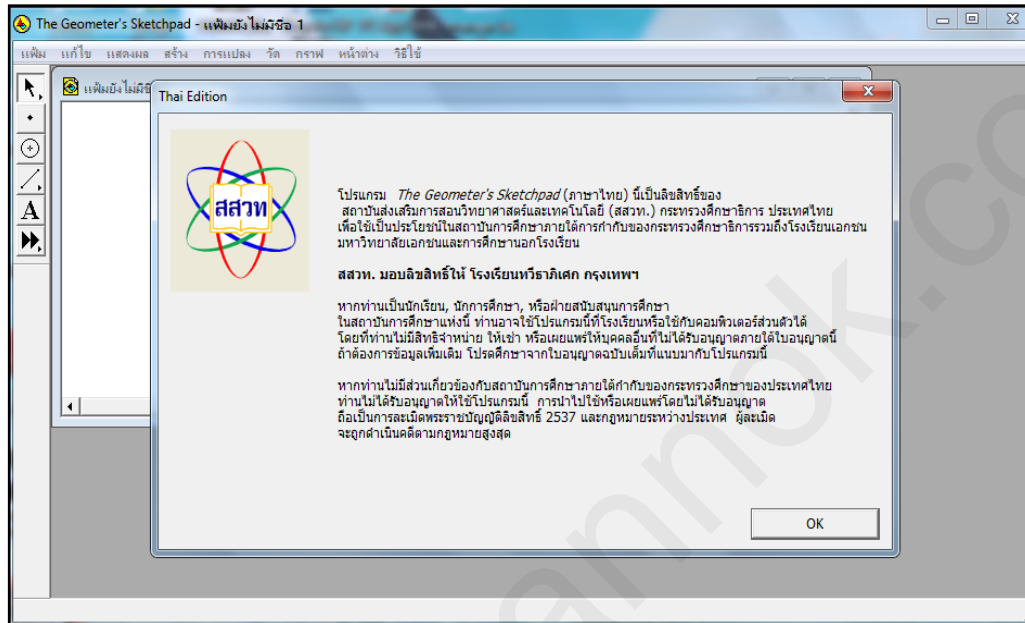
$$d = \frac{|(3)(-2) + (4)(-1) - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$$

ดังนั้น ระยะทางระหว่างเส้นตรง $3x + 4y = 10$ กับจุด $(-2, -1)$ เท่ากับ 4 หน่วย

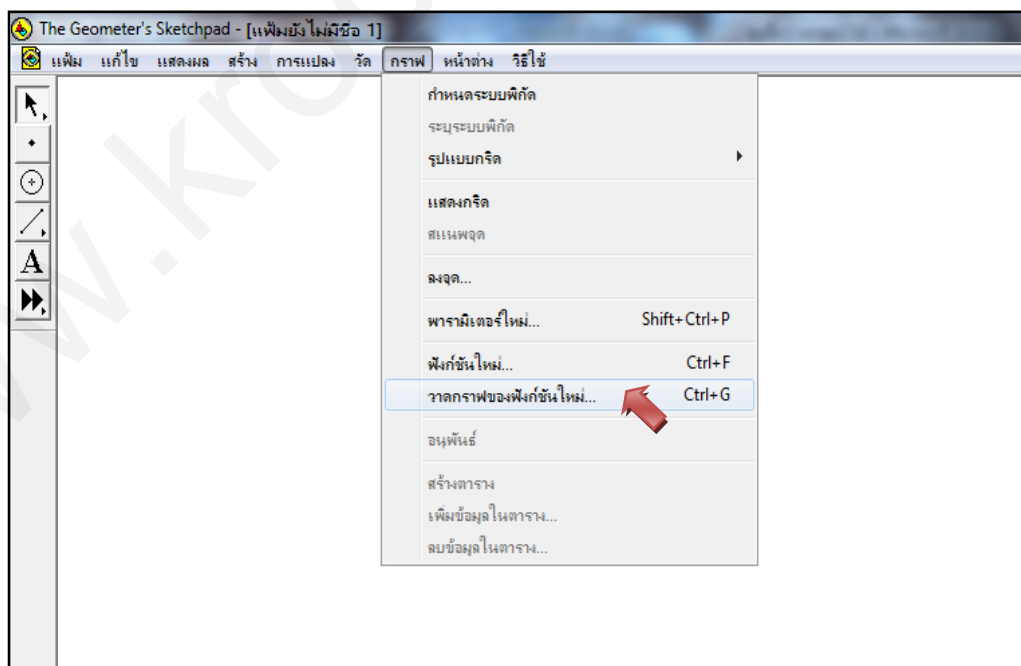


ทบทวนการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)

1. หน้าจอหลักของโปรแกรม GSP



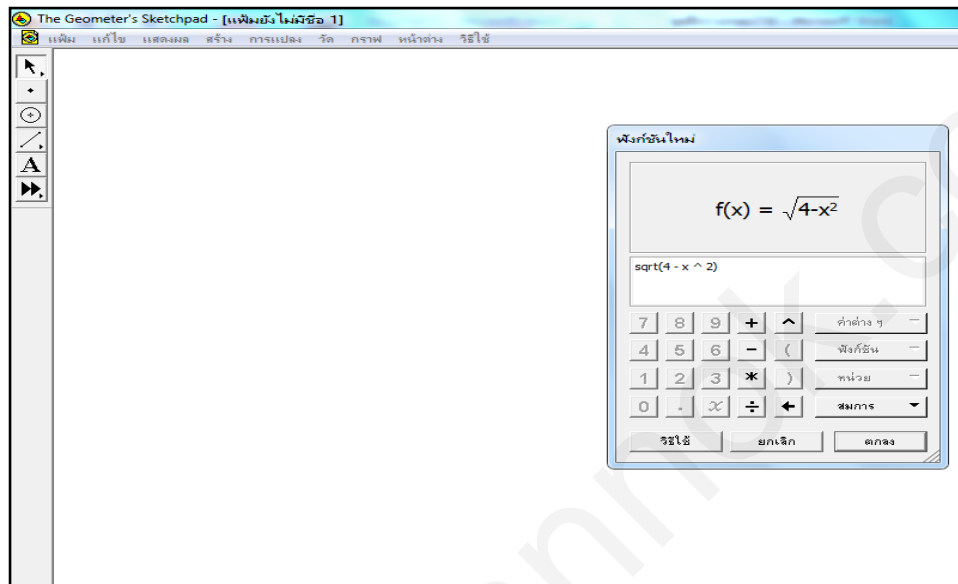
2. เลือกเมนูกราฟ ⇒ เลือกเมนู วาดกราฟของฟังก์ชันใหม่



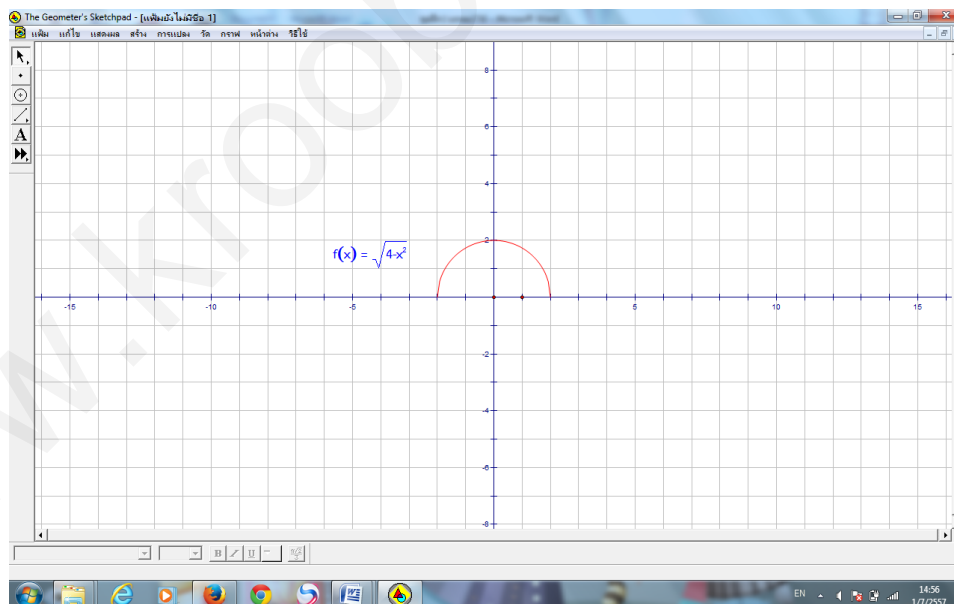
3. พิมพ์ฟังก์ชันที่ต้องการเขียนกราฟ โดยจัดสมการในเทอมของ x

เช่น สมการ $x^2 + y^2 = 4$ จัดรูปสมการจะได้ $y = \pm \sqrt{4 - x^2}$

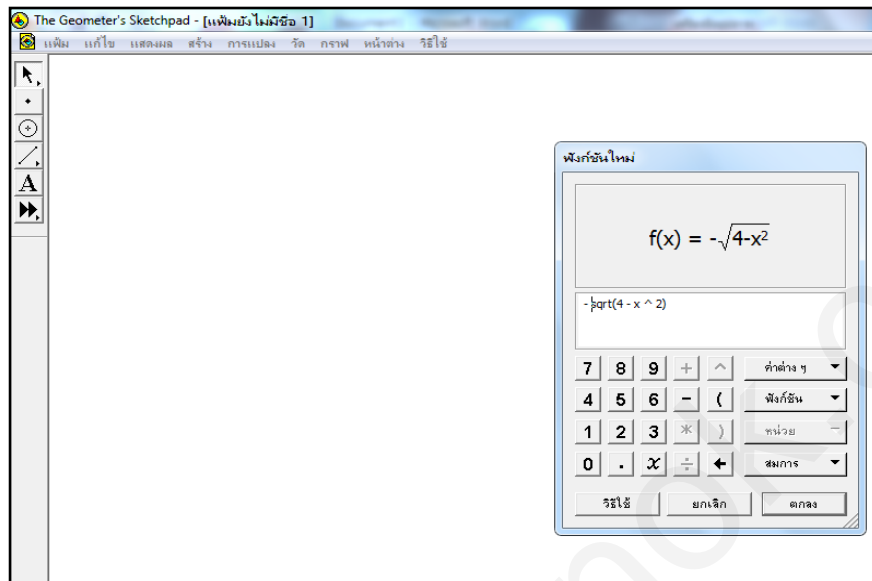
3.1 พิมพ์สมการ โดยเลือกเมนูฟังก์ชัน เลือก sqrt แล้วพิมพ์ $4 - x^2$ ดังรูป



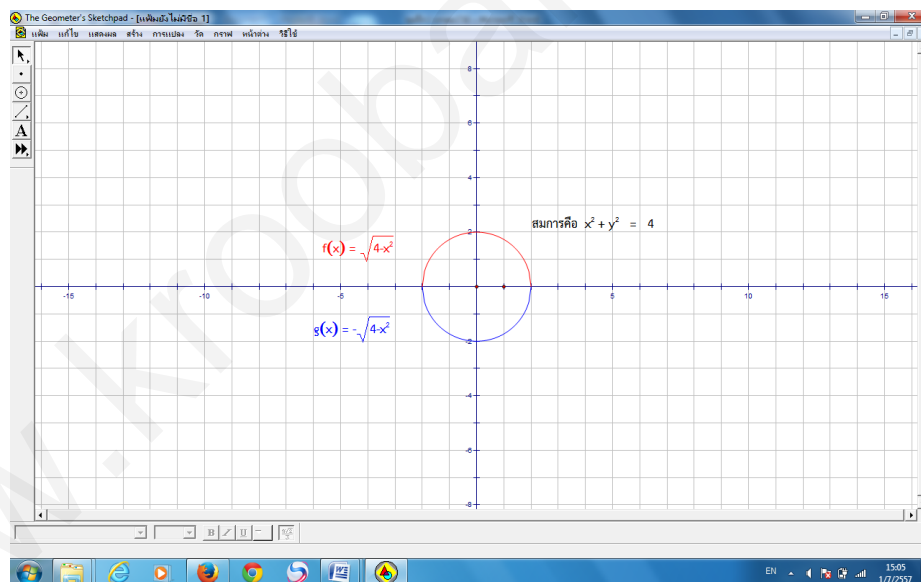
3.2 คลิก ตกลง จะได้กราฟ ดังรูป



3.3 พิมพ์สมการ โดยเลือกเมนูฟังก์ชัน เลือก sqrt แล้วพิมพ์ เครื่องหมายลบ (-) หน้า sqrt แล้วพิมพ์ $4 - x^2$ จะได้ฟังก์ชัน ดังรูป



3.4 คลิก ตกลง จะได้กราฟดังรูป (สมการคือ $x^2 + y^2 = 4$)



พร้อมแล้ว นักเรียนไปศึกษาเรื่อง วงกลม
ที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0) ได้เลยล่ะ



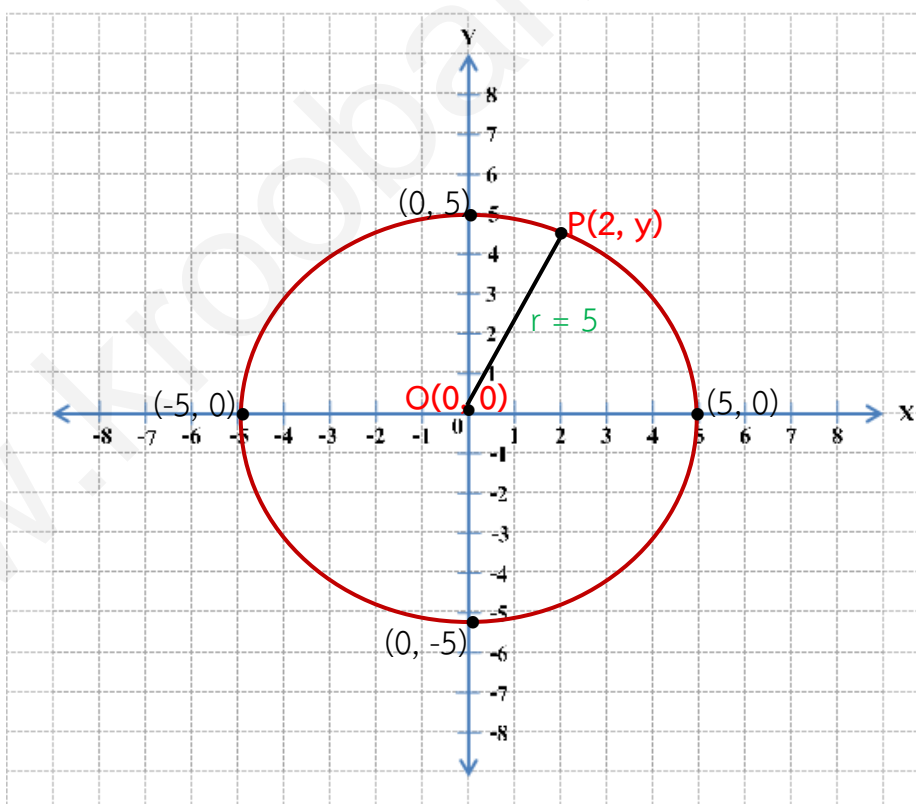
ใบความรู้ที่ 1.1

การหาความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$

บทนิยาม

วงกลม (circle) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (center) ของวงกลม และระยะทางคงตัวดังกล่าวเรียกว่า รัศมี (radius) ของวงกลม

จากบทนิยามของวงกลม ให้นักเรียนศึกษา ตัวอย่างจากกราฟของวงกลมต่อไปนี้



พิจารณาจากกราฟ

1. วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ $O(0, 0)$
2. วงกลมนี้มีรัศมียาว 5 หน่วย
3. จุดต่าง ๆ ที่อยู่บนวงกลมนี้ ได้แก่ $\{(5, 0), (0, 5), (-5, 0), (0, -5), (3, 4), (4, 3), (-3, -4), \dots\}$ มีจุดอื่น ๆ อีกมากมายนับไม่ถ้วน
4. ต้องการหาพิกัดของจุด $P(2, y)$

จุด P ห่างจากจุด O เป็นระยะ 5 หน่วย เพราะ \overline{PO} เป็นรัศมีของวงกลม

ถ้า $p_1(x_1, y_1)$ และ $p_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดในระนาบ ระยะทาง

ระหว่างจุด p_1 และ p_2 เท่ากับ $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

เนื่องจาก ระยะจากพิกัดจุด $P(2, y)$ และ $O(0, 0)$ เท่ากับ 5 หน่วย แทนค่า จะได้ว่า

$$5 = \sqrt{(2 - 0)^2 + (y - 0)^2}$$

$$5 = \sqrt{(2)^2 + (y)^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$5^2 = 2^2 + y^2$$

$$\text{หรือ } 2^2 + y^2 = 5^2 \quad \dots\dots(1) \quad *$$

$$y^2 = 25 - 4$$

$$y^2 = 21$$

$$y = \sqrt{21} \text{ หรือ } -\sqrt{21}$$

แต่พิกัดของจุด P อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 ค่า y เป็นค่าบวก ดังนั้นจะได้ว่า $y = \sqrt{21}$ นั่นคือ พิกัดของจุด P คือ $(2, \sqrt{21})$



เราหาพิกัดของจุด P ได้แล้ว
เราามาตรวจสอบกับข้อว่าจุดอื่น ๆ
เป็นจริงตามสมการ (1)
หรือไม่ ไปดูกันเถอะ

ใช้ความรู้เดิม

การหาระยะระหว่างจุด

สองจุด ห่วง

จากสมการ(1)

$$2^2 + y^2 = 5^2$$

จุด $P(2, \sqrt{21})$ แทนค่าในสมการ จะได้ $2^2 + \sqrt{21}^2 = 5^2$ เป็นจริง

จากจุดต่าง ๆ บนวงกลม จะหา
จากสมการหรือวิธีแปลค่า
ไปตรวจสอบกับแต่ละค่า



จุด	(5, 0)	หาได้จากสมการ	$5^2 + 0^2 = 5^2$	จริง
จุด	(-5, 0)	หาได้จากสมการ	$(-5)^2 + 0^2 = 5^2$	จริง
	จุด (0, 5)	หาได้จากสมการ	$0^2 + 5^2 = 5^2$	จริง
	จุด (0, -5)	หาได้จากสมการ	$0^2 + (-5)^2 = 5^2$	จริง
	จุด (3, 4)	หาได้จากสมการ	$3^2 + 4^2 = 5^2$	จริง
	จุด (4, 3)	หาได้จากสมการ	$4^2 + 3^2 = 5^2$	จริง
	จุด (-3, 4)	หาได้จากสมการ	$(-3)^2 + 4^2 = 5^2$	จริง
	⋮		⋮	

จะได้ว่า ถ้าจุด (x, y) เป็นจุดใด ๆ บนวงกลมนี้ จะเป็นจริงตามสมการ $x^2 + y^2 = 5^2$ นั่นคือ

- จะเขียนเซตของจุดต่าง ๆ เหล่านี้แบบแจกแจงสมาชิก คือ $\{(5, 0), (0, 5), (-5, 0), (0, -5), (3, 4), (4, 3), (-3, -4), \dots\}$
- จะเขียนเซตของจุดต่าง ๆ เหล่านี้แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก คือ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 5^2\}$

จะเรียกลักษณะการเขียนแบบนี้ว่า

“ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุด

ศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ รัศมียาว 5 หน่วย” ค่ะ



ถ้าให้จุด $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $C(0, 0)$ และ
ความยาวรัศมียาว r หน่วย

จะเขียนสมการของวงกลม คือ $x^2 + y^2 = r^2$

และจะเขียนความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $C(0, 0)$ และ
ความยาวรัศมียาว r หน่วย คือ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$



เรามาศึกษาการหาความสัมพันธ์ที่มี
กราฟเป็นวงกลม เมื่อกำหนด
ส่วนประกอบของวงกลม กันเลยล่ะ...

ตัวอย่างที่ 1 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ และ
รัศมียาว 6 หน่วย พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ จาก สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(0, 0)$ และรัศมีเท่ากับ r หน่วย
คือ $x^2 + y^2 = r^2$

โจทย์กำหนด $r = 6$ ดังนั้น สมการคือ $x^2 + y^2 = 6^2$

หรือ สมการคือ $x^2 + y^2 = 36$

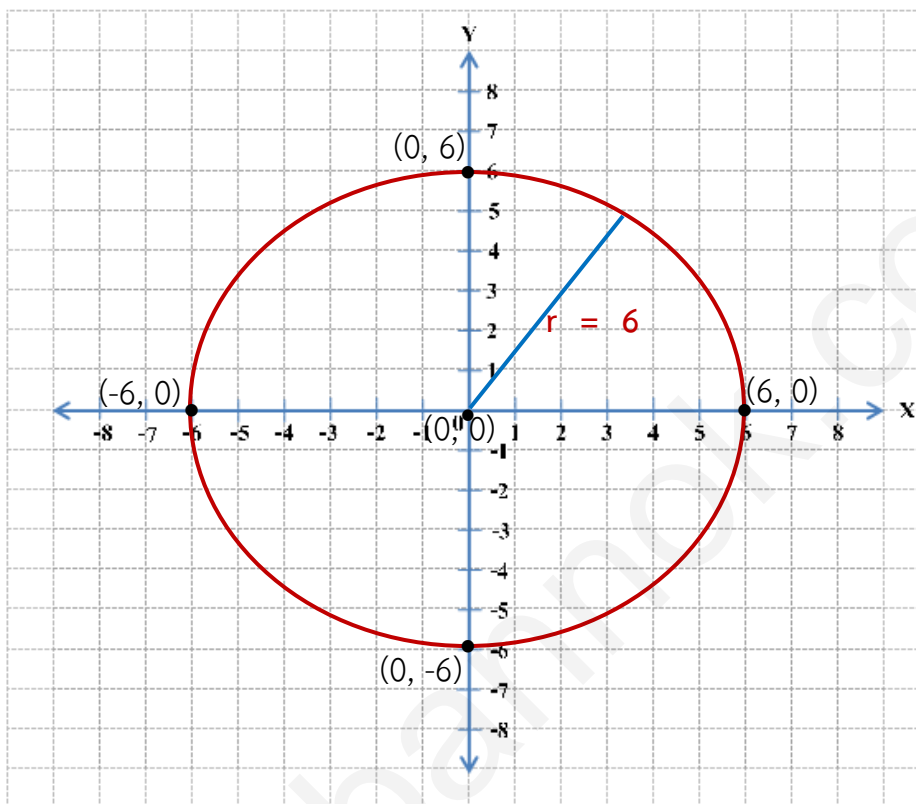
ดังนั้น ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม คือ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 36\}$

เขียนกราฟได้ดังนี้ (กำหนดค่า x และ y เป็นจำนวนเต็มให้สมการเป็นจริงเพื่อเขียนกราฟได้ง่าย)

จากสมการ $x^2 + y^2 = 36$

x	-6	0	6	0
y	0	-6	0	6

เขียนคู่อันดับที่ได้ คือ $(-6, 0)$, $(0, -6)$, $(6, 0)$, $(0, 6)$ ลงบนตารางกราฟ แล้วเขียนกราฟของสมการ คือ



ถ้าโจทย์กำหนดมาเป็นความยาวเส้นผ่าน
ศูนย์กลางจะหาสมการได้ยังไงนะ



ตัวอย่างที่ 2 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ และ
เส้นผ่านศูนย์กลางยาว 14 หน่วย พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ เนื่องจาก รัศมียาวเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวเส้นผ่านศูนย์กลาง

จากโจทย์ ถ้าเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 14 หน่วย จะได้รัศมี $r = 7$

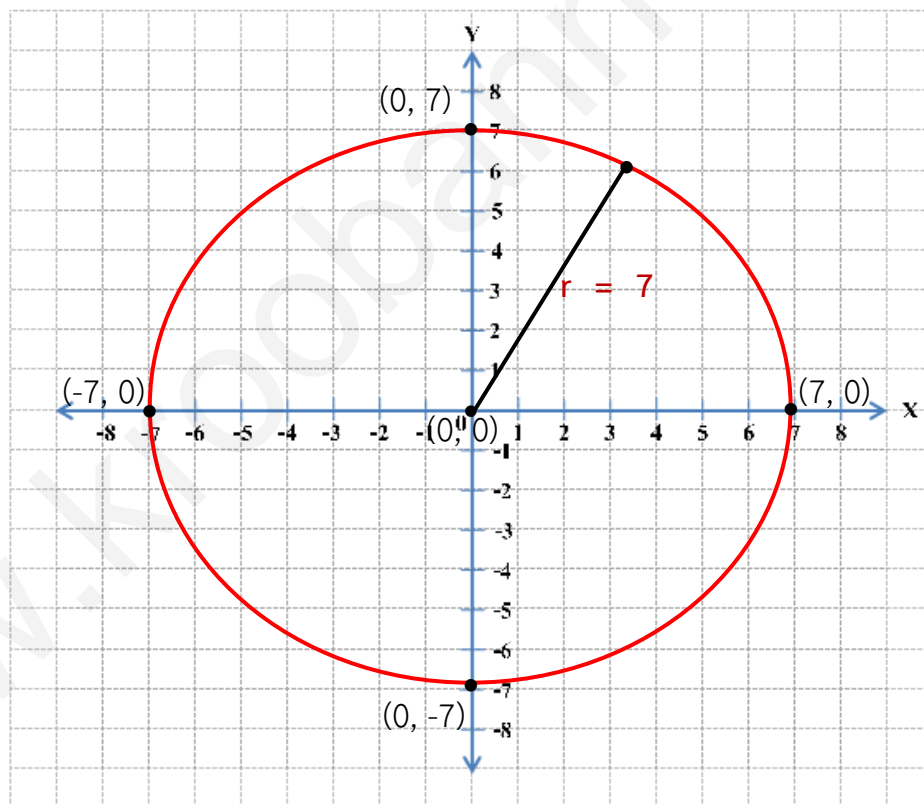
สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(0, 0)$ และรัศมีเท่ากับ r หน่วย คือ $x^2 + y^2 = r^2$

เมื่อ $r = 7$ แทนค่าในสมการ จะได้สมการคือ $x^2 + y^2 = 7^2$

หรือ สมการคือ $x^2 + y^2 = 49$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม คือ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 49\}$

เขียนกราฟได้คือ

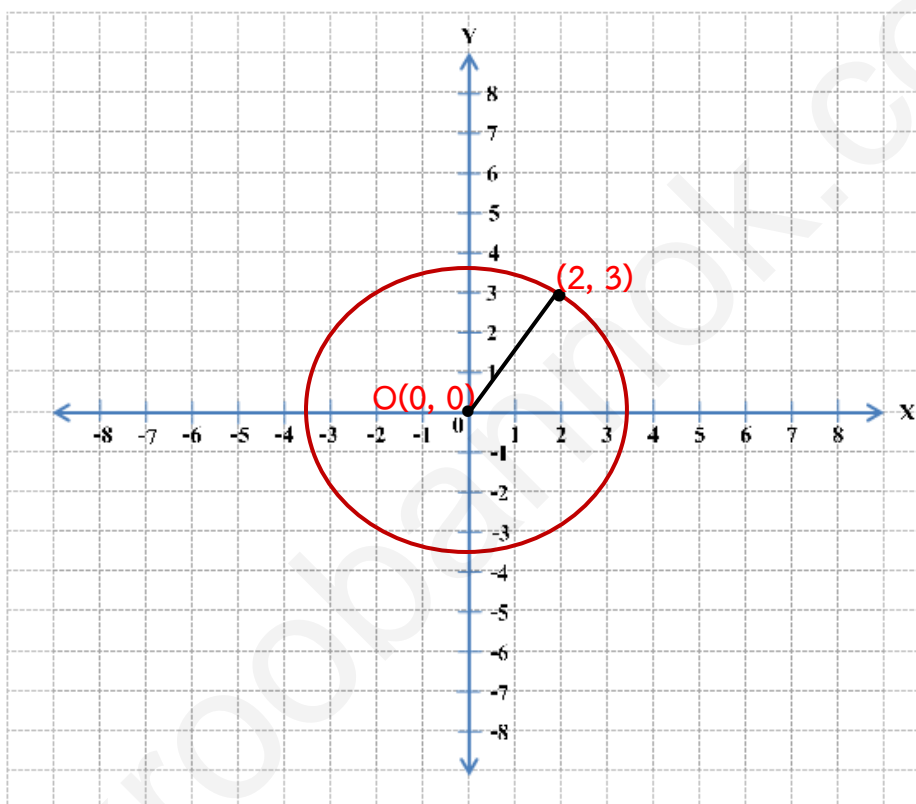


ตัวอย่างที่ 3 จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ และผ่านจุด $(2, 3)$ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ จาก สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(0, 0)$ และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

คือ $x^2 + y^2 = r^2$ (โจทย์ไม่ได้กำหนดความยาวรัศมี r)

จากโจทย์ เขียนกราฟคร่าว ๆ ของวงกลมได้ดังนี้



หาความยาวรัศมีจากระยะระหว่างจุด $(2, 3)$ กับ $(0, 0)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad r &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - 0)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

จาก สมการ $x^2 + y^2 = r^2$


จะได้ $x^2 + y^2 = \sqrt{13}^2$

$$x^2 + y^2 = 13$$


ดังนั้น ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม คือ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 13\}$

คำถามชวนคิด


ถ้ากำหนดสมการต่อไปนี้ นักเรียนคิดว่าควรกำหนดจำนวนเต็ม x และ y เท่าไร เพื่อให้ง่ายต่อการเขียนกราฟ

1. $x^2 + y^2 = 4$ 


x				
y				

2. $x^2 + y^2 = 9$ 


x				
y				

3. $x^2 + y^2 = 16$ 


x				
y				

4. $x^2 + y^2 = 36$ 


x				
y				

5. $x^2 + y^2 = 100$ 


x				
y				

6. $x^2 + y^2 = 144$ 

x				
y				

7. $x^2 + y^2 = 169$ 

x				
y				

8. $x^2 + y^2 = 225$ 

x				
y				

ใบงานที่ 1.1

การหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(0, 0)$ และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

จงเขียนความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

- จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ $(0, 0)$ และรัศมียาว 8 หน่วย

วิธีทำ จาก สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(0, 0)$ และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

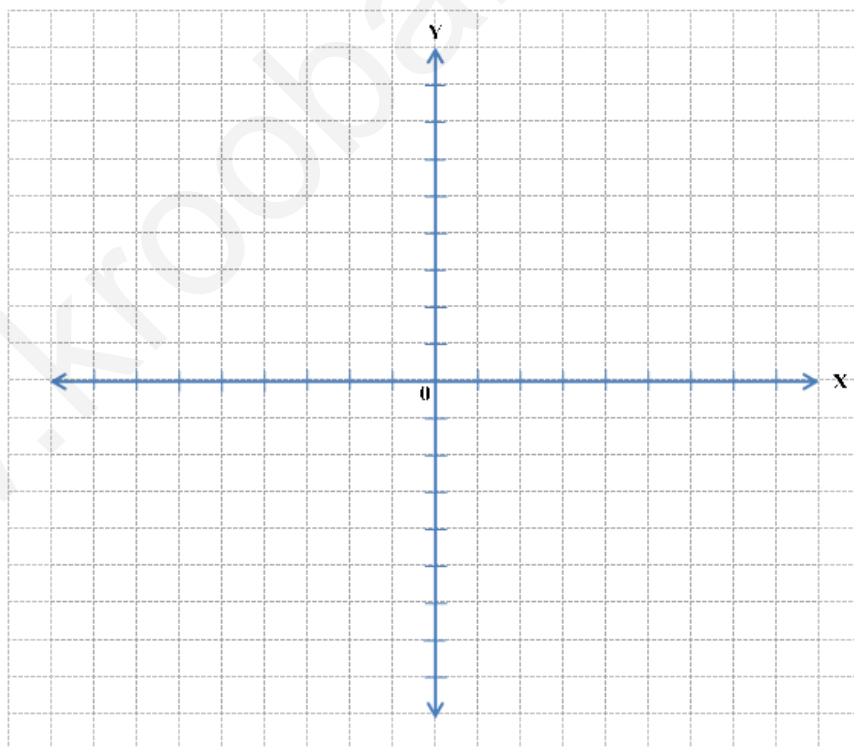
$$\text{คือ } x^2 + y^2 = r^2$$

โจทย์กำหนด $r = \dots\dots\dots$ ดังนั้น สมการคือ $x^2 + y^2 = \dots\dots^2$

หรือ สมการคือ $\dots\dots\dots$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม คือ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = \dots\dots\dots\}$

เขียนกราฟได้คือ



2. จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ $(0, 0)$ และกราฟของวงกลมตัดแกน x ที่จุด $(4, 0)$ และ $(-4, 0)$

วิธีทำ

.....

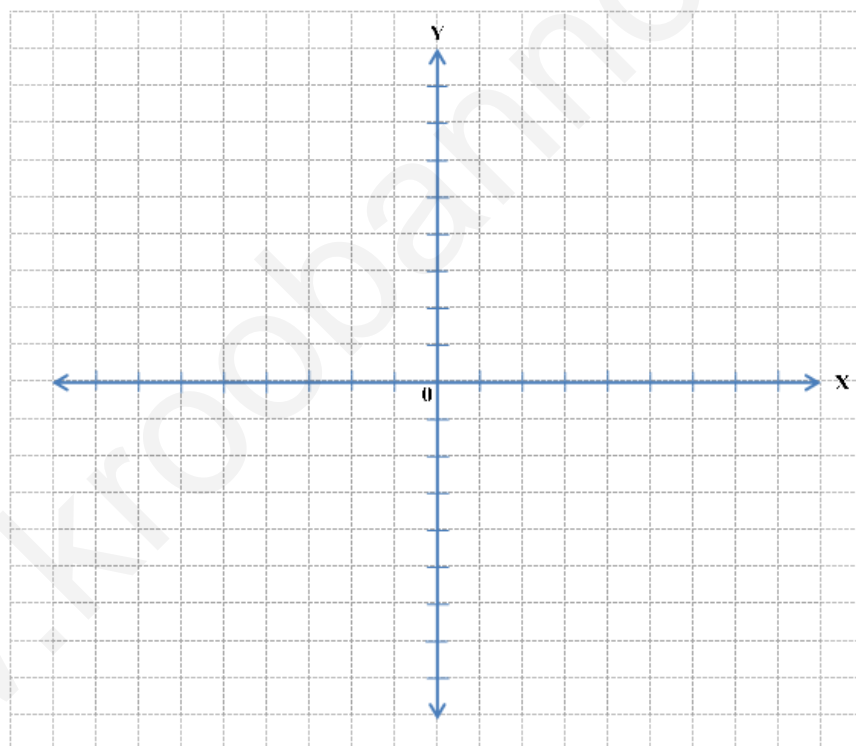
.....

.....

.....

.....

เขียนกราฟได้คือ



ง่าย ๆ แบบนี้
ทำข้อต่อไปเลยล่ะ

3. จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ $(0, 0)$ และกราฟของวงกลมตัดแกน y ที่จุด $(0, 7)$ และ $(0, -7)$

วิธีทำ

.....

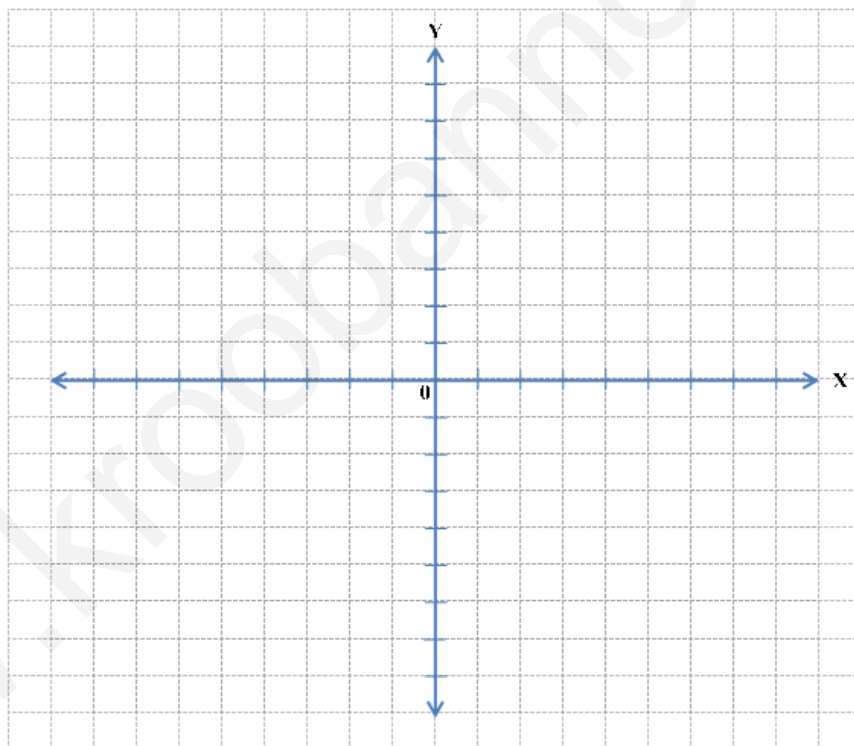
.....

.....

.....

.....

เขียนกราฟได้คือ



4. จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ $(0, 0)$ และเส้นผ่านศูนย์กลาง 18 หน่วย

.....

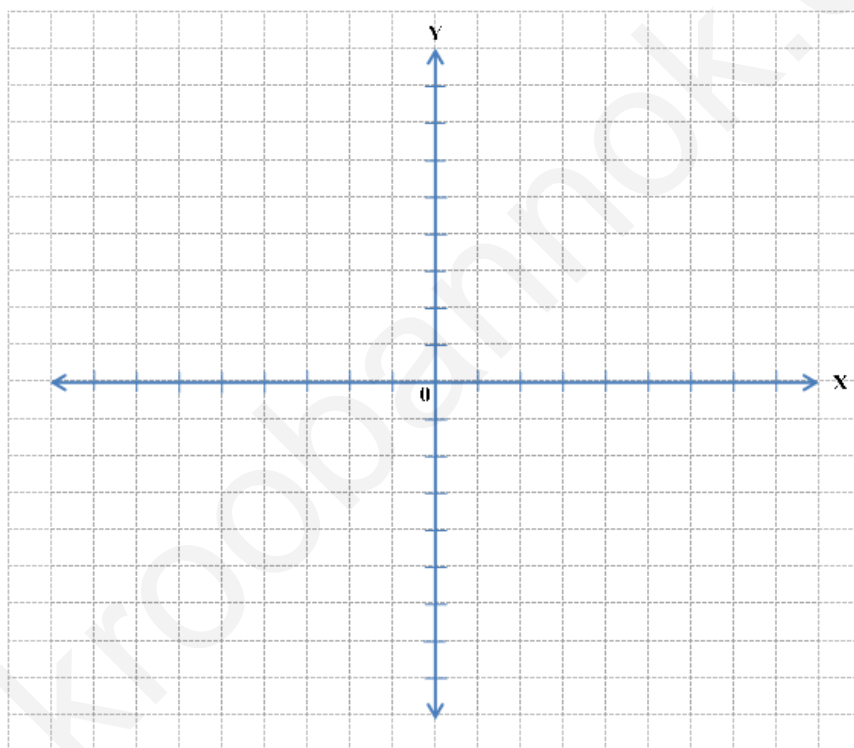
.....

.....

.....

.....

เขียนกราฟได้คือ



5. จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ $(0, 0)$ และผ่านวงกลมผ่านจุด $(-3, 1)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

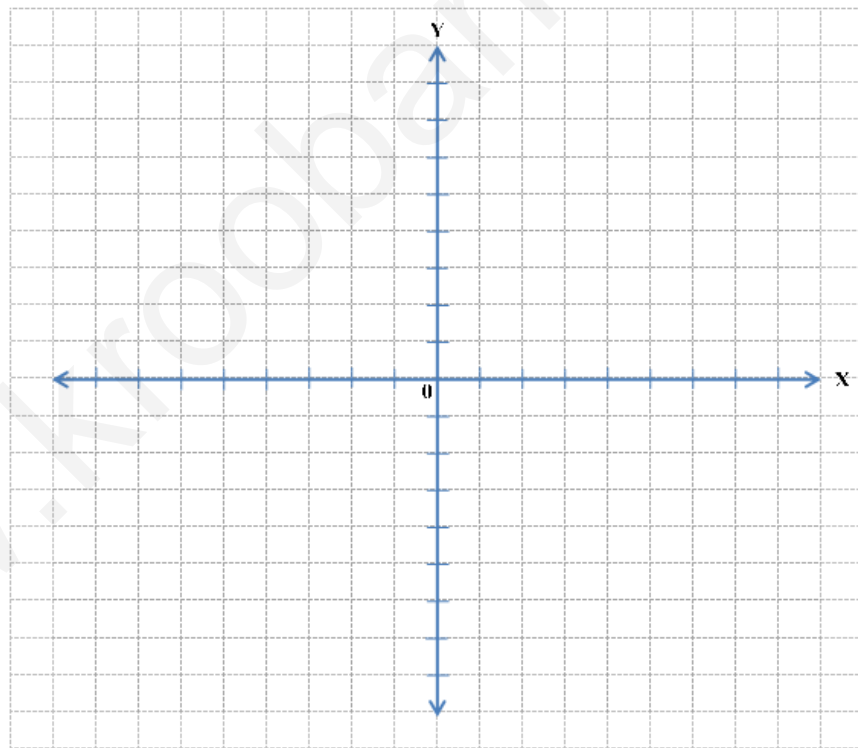
.....

.....

.....

.....

เขียนกราฟได้คือ



ใบงานที่ 1.2 (กิจกรรมเสริมนอกเวลาเรียน)

การหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(0, 0)$ และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

1. จงเขียนความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

1.1 จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ $(0, 0)$ และรัศมียาว 5 หน่วย

วิธีทำ จาก สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(0, 0)$ และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

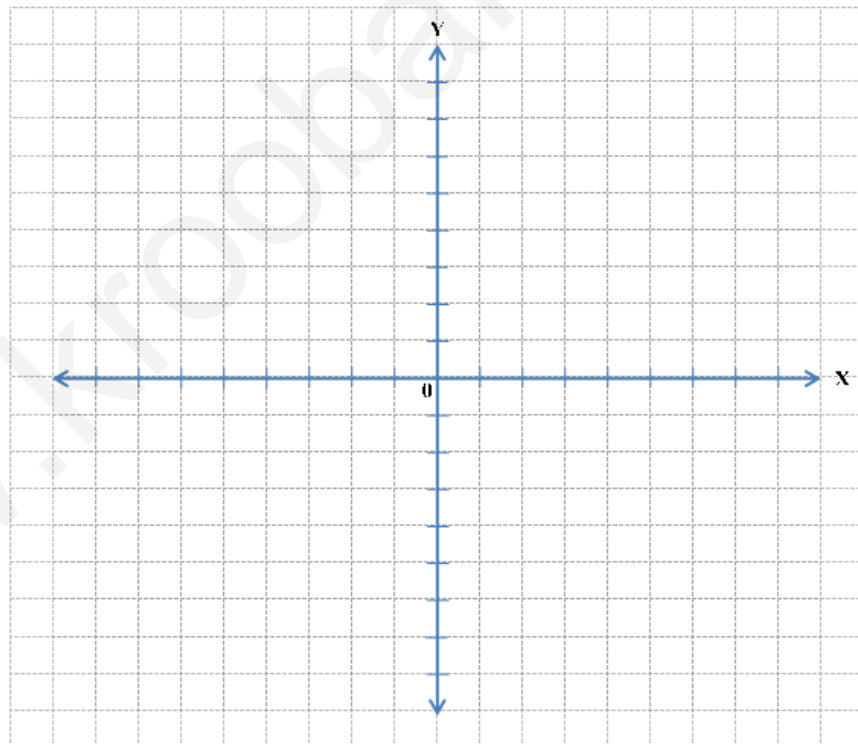
$$\text{คือ } x^2 + y^2 = r^2$$

โจทย์กำหนด $r = \dots\dots\dots$ ดังนั้น สมการคือ $x^2 + y^2 = \dots\dots^2$

หรือ สมการคือ $\dots\dots\dots$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม คือ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = \dots\dots\dots\}$

เขียนกราฟได้คือ



1.2 จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ $(0, 0)$ และกราฟของวงกลมตัดแกน x ที่จุด $(\sqrt{7}, 0)$ และ $(-\sqrt{7}, 0)$

วิธีทำ

.....

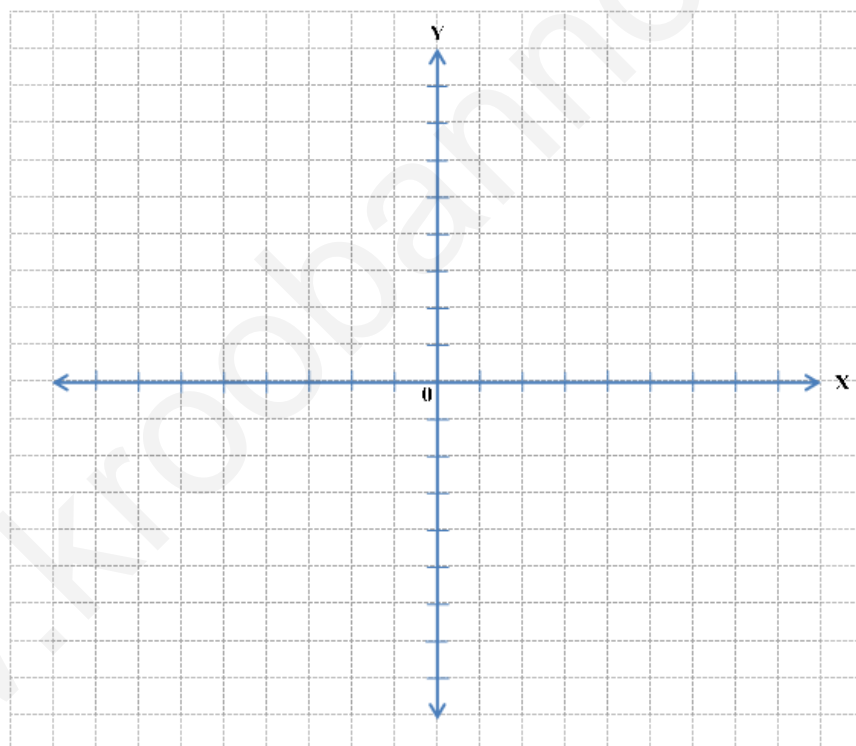
.....

.....

.....

.....

เขียนกราฟได้คือ



ง่าย ๆ แบบนี้
ทำข้อต่อไปเลยล่ะ

1.3 จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ $(0, 0)$ และผ่านวงกลมผ่านจุด $(-1, 4)$

วิธีทำ

.....

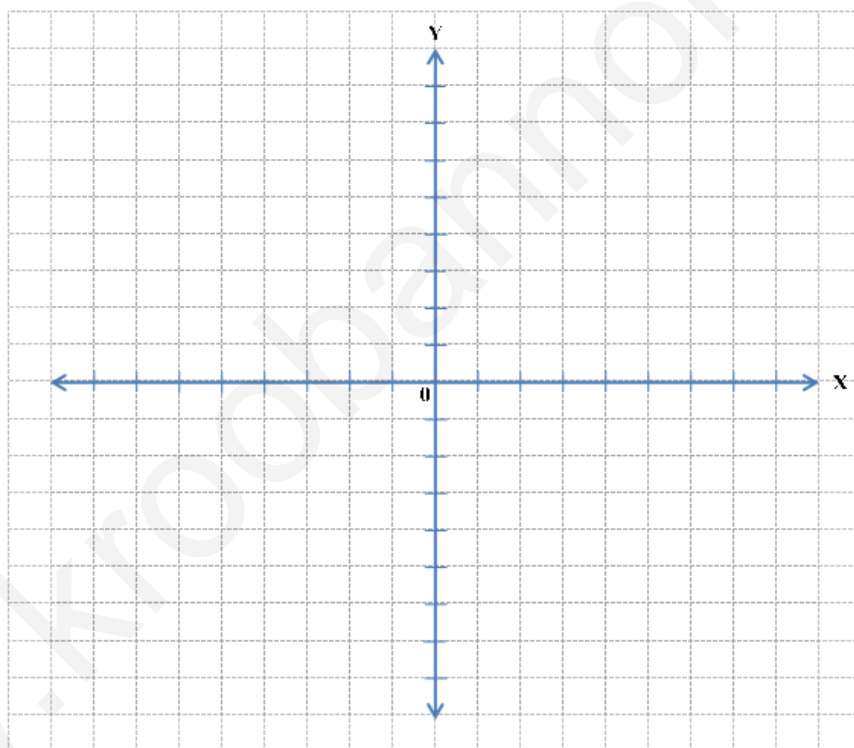
.....

.....

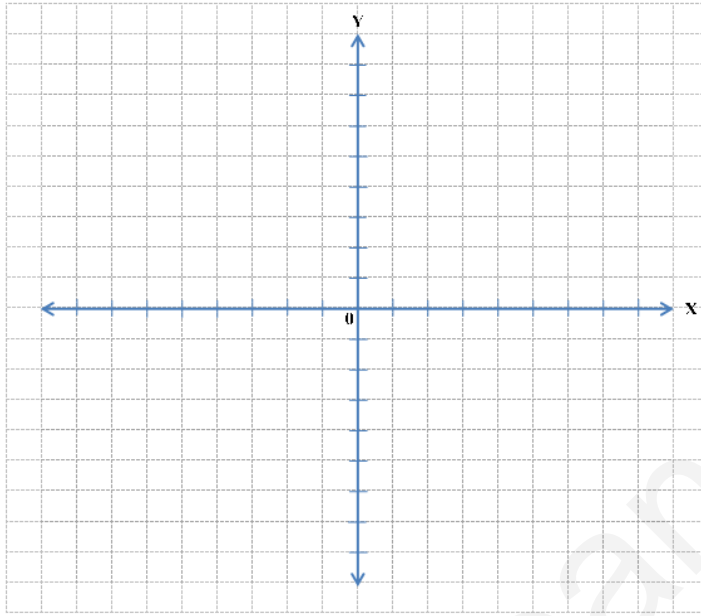
.....

.....

เขียนกราฟได้คือ



2. ในท้องถิ่นอำเภอขุนยวม จังหวัดแม่ฮ่องสอนมีชนเผ่าไทใหญ่ ที่มีหมวกซึ่งเป็นเอกลักษณ์ของชาวไทใหญ่เรียกว่า ก๊อบ ลักษณะฐานเป็นรูปวงกลม ดังรูป ถ้าให้ฐานของก๊อบมีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ และมีความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานก๊อบยาว 50 เซนติเมตร (1หน่วย : 10 ซม.) จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมบริเวณที่เป็นฐานของก๊อบใบนี้



ตัวอย่าง ก๊อบไต

วิธีทำ

.....

.....

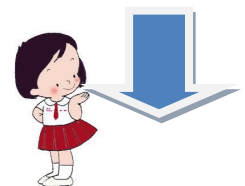
.....

.....

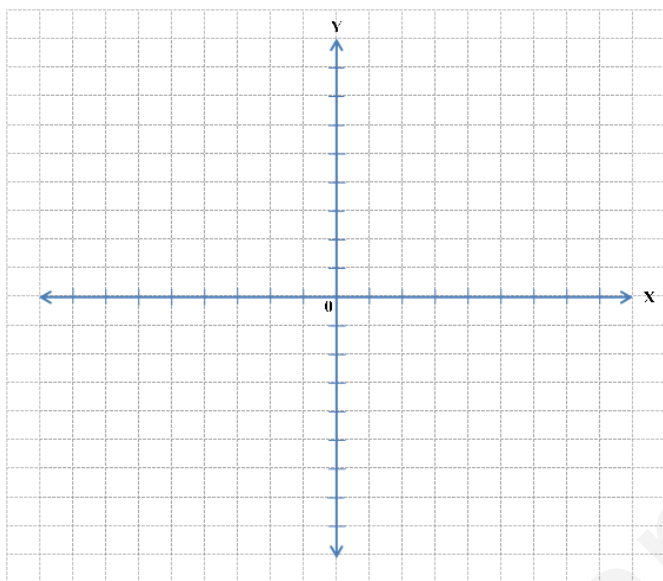
.....

.....

.....

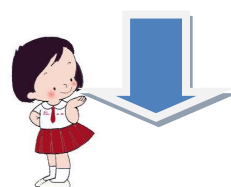


3. “ถั่วเน่าแผ่น” เป็นอาหารที่ได้จากการถนอมอาหารวิธีหนึ่งของคนในท้องถิ่นจังหวัดแม่ฮ่องสอน เป็นผลิตภัณฑ์ที่ทำจากเมล็ดถั่วเหลืองหรือถั่วเน่า มีลักษณะเป็นรูปวงกลม ดังรูป ถ้าให้ถั่วเน่าแผ่น มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ และมีความยาวของเส้นรอบรูปยาว 44 เซนติเมตร จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมของถั่วเน่าแผ่นนี้



ตัวอย่างถั่วเน่าแผ่น

วิธีทำ



แบบทดสอบที่ 1.1

หน่วยการเรียนรู้ ภาคตัดกรวย

เรื่อง การหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(0, 0)$
และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

คำชี้แจง ข้อสอบฉบับนี้เป็นแบบอัตนัยจำนวน 2 ข้อ เกี่ยวข้องกับหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(0, 0)$ และรัศมีเท่ากับ r หน่วย ให้นักเรียนทำด้วยตนเองเพื่อทดสอบความเข้าใจหลังจากทำกิจกรรมตามใบงานที่ 1.1-1.2 ครบแล้ว โดยแสดงวิธีทำลงในกระดาษคำตอบเท่านั้น (ข้อละ 5 คะแนน)

1. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(0, 0)$ และความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 6 หน่วย พร้อมทั้งเขียนกราฟ
2. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ และกราฟของวงกลมตัดแกน y ที่จุด $(0, 10)$ และ $(0, -10)$



กระดาษคำตอบแบบทดสอบที่ 1.1

เรื่อง การหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(0, 0)$
และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

ชื่อ.....นามสกุล.....ชั้น ม.เลขที่.....

1. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(0, 0)$ และความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 6 หน่วย พร้อมทั้งเขียนกราฟ

.....

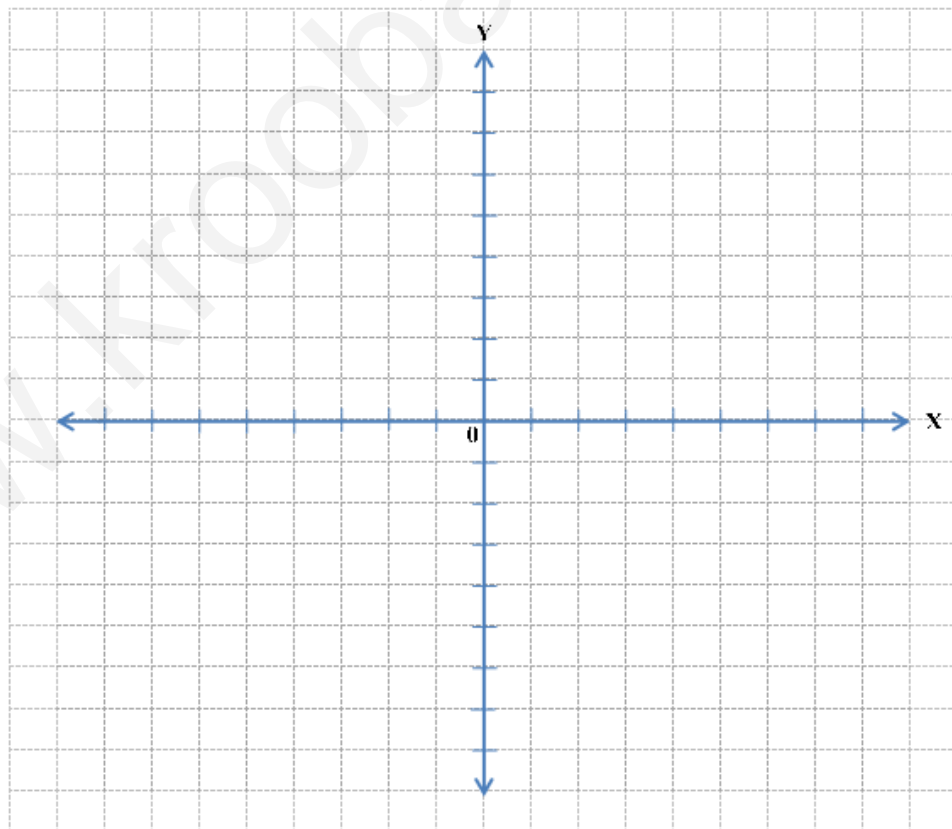
.....

.....

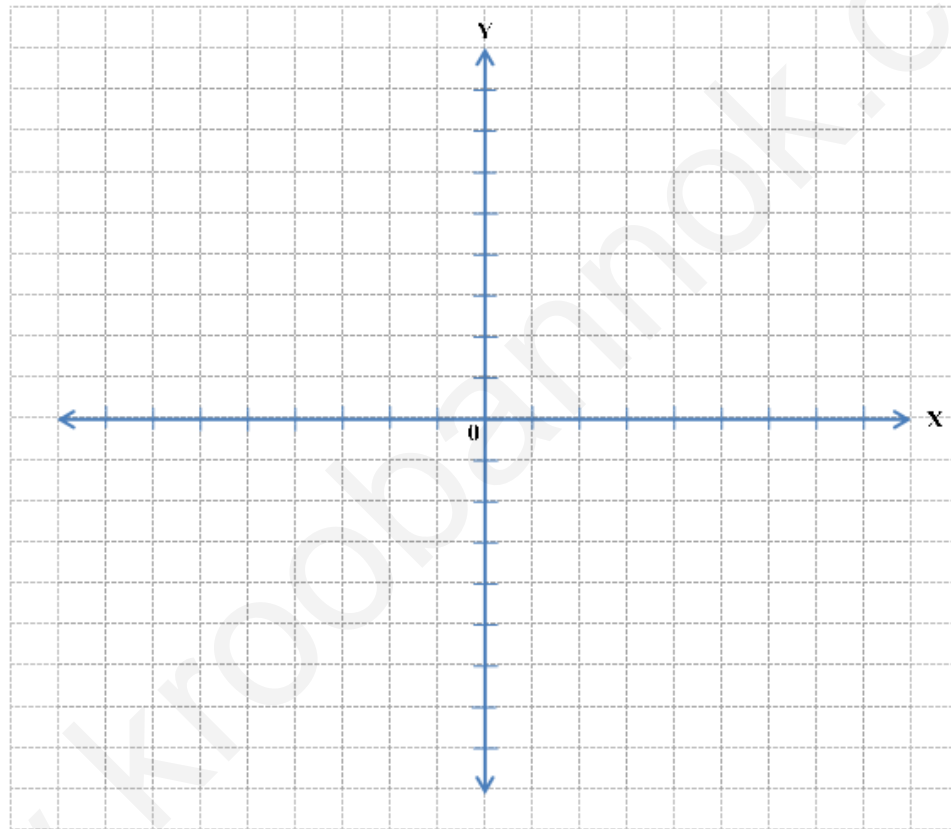
.....

.....

เขียนกราฟได้คือ



2. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ และกราฟของวงกลมตัดแกน y ที่จุด $(0, 10)$ และ $(0, -10)$



คะแนนที่ได้ / คะแนนเต็ม



พอใจมาก

พอใจปานกลาง

พอใจน้อย

หมายเหตุ : ให้นักเรียนบอกระดับความพึงพอใจของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบ

ใบความรู้ที่ 1.2

การหาส่วนประกอบของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0)

ลองดูสิว่า... ถ้าเราต้องการรู้ว่า
วงกลมมีรัศมียาวเท่าไร จะดูจาก
สมการของวงกลมนั้น ได้อย่างไร?



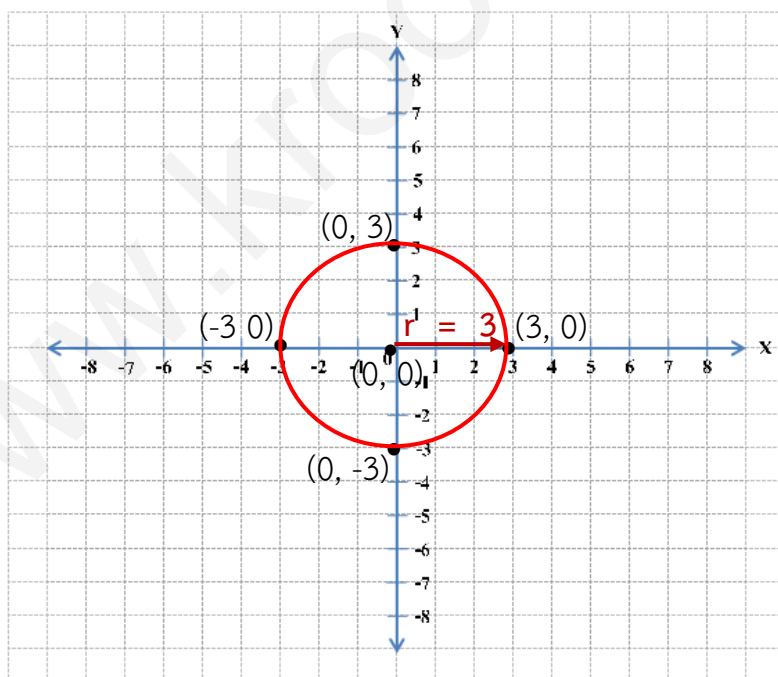
ตัวอย่างที่ 1 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟ

ของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 9\}$

วิธีทำ จากโจทย์ สมการคือ $x^2 + y^2 = 9$

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ (0, 0) และรัศมี 3 หน่วย
เขียนกราฟ ดังนี้



ง่ายจังเลย
อีกข้อสิ



ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟของ

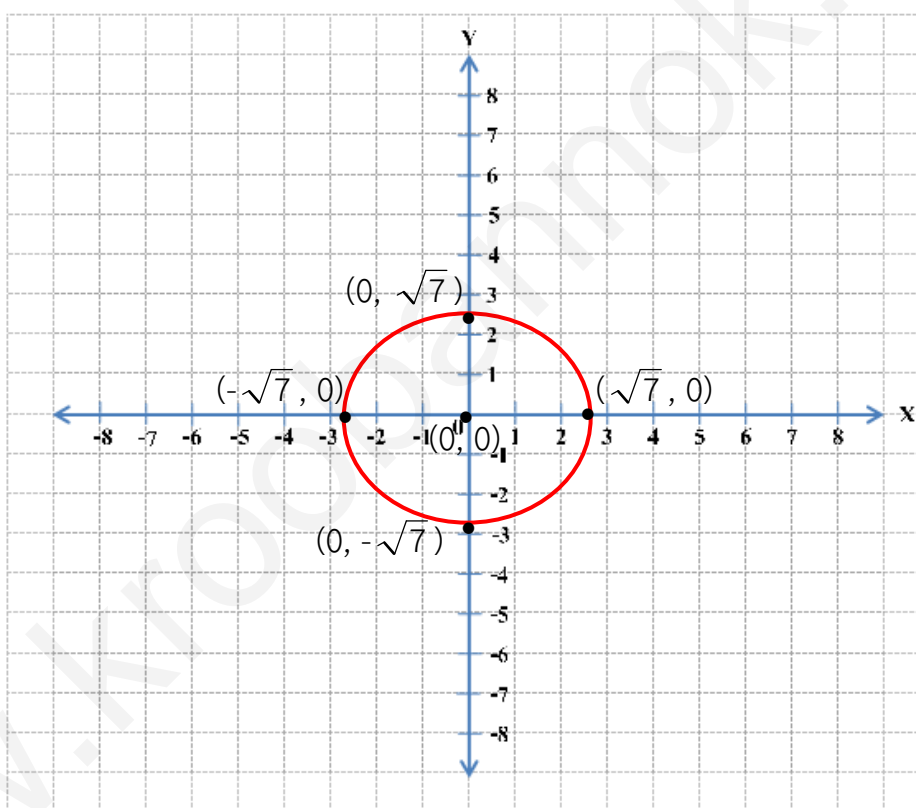
ความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 7 = 0\}$

วิธีทำ จากโจทย์ สมการคือ $x^2 + y^2 - 7 = 0$

$$x^2 + y^2 = 7$$

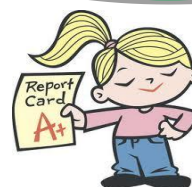
$$x^2 + y^2 = (\sqrt{7})^2$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ $(0, 0)$ และรัศมี $\sqrt{7}$ หน่วย ($\sqrt{7} \approx 2.65$)
เขียนกราฟ ดังนี้



สรุปแล้ว ถ้าจัดรูปสมการวงกลมในรูป $x^2 + y^2 = r^2$ แสดงว่า วงกลมนั้นมีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ และรัศมียาว r หน่วย นั่นเอง

ง่าย ๆ แบบนี้ ทุกคนคงทำถูก
ทุกข้อนะจ๊ะ



ใบงานที่ 1.3

การหาส่วนประกอบของวงกลม ที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0)

จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 16\}$

วิธีทำ จากโจทย์ สมการคือ

$$x^2 + y^2 = 16$$

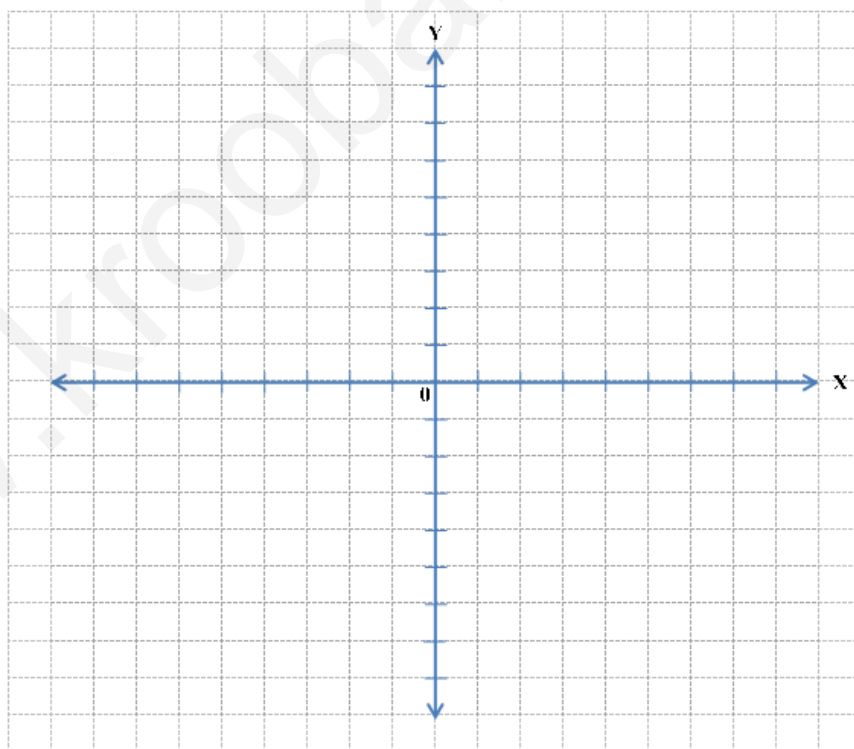
$$x^2 + y^2 = 4^2$$

.....

.....

.....

เขียนกราฟได้คือ



2. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 10\}$

วิธีทำ

.....

.....

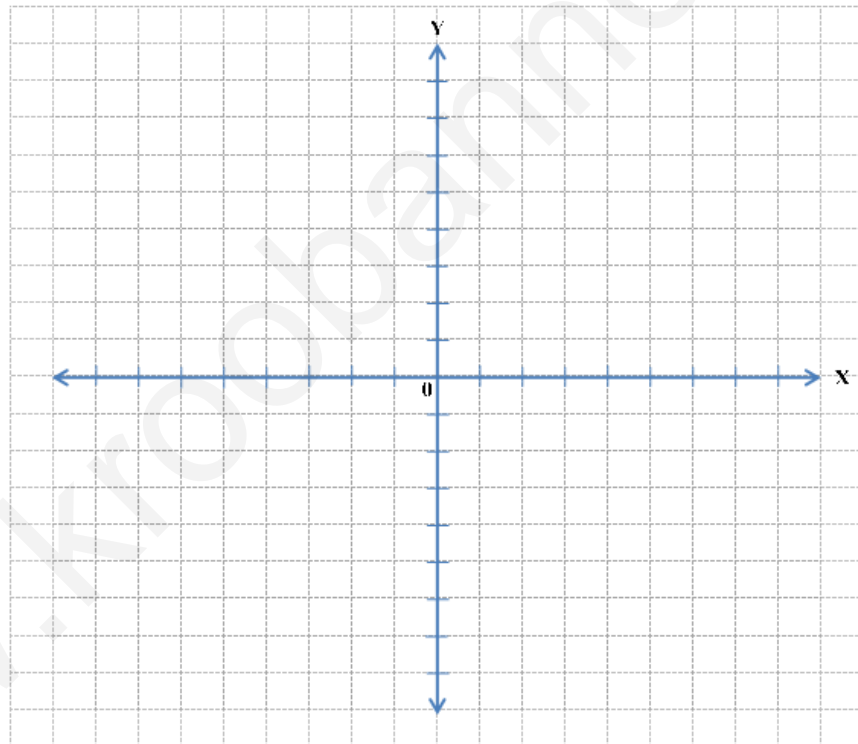
.....

.....

.....

.....

เขียนกราฟได้คือ



3. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 121 = 0\}$

วิธีทำ

จากโจทย์ สมการคือ

$$x^2 + y^2 - 121 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 121$$

.....

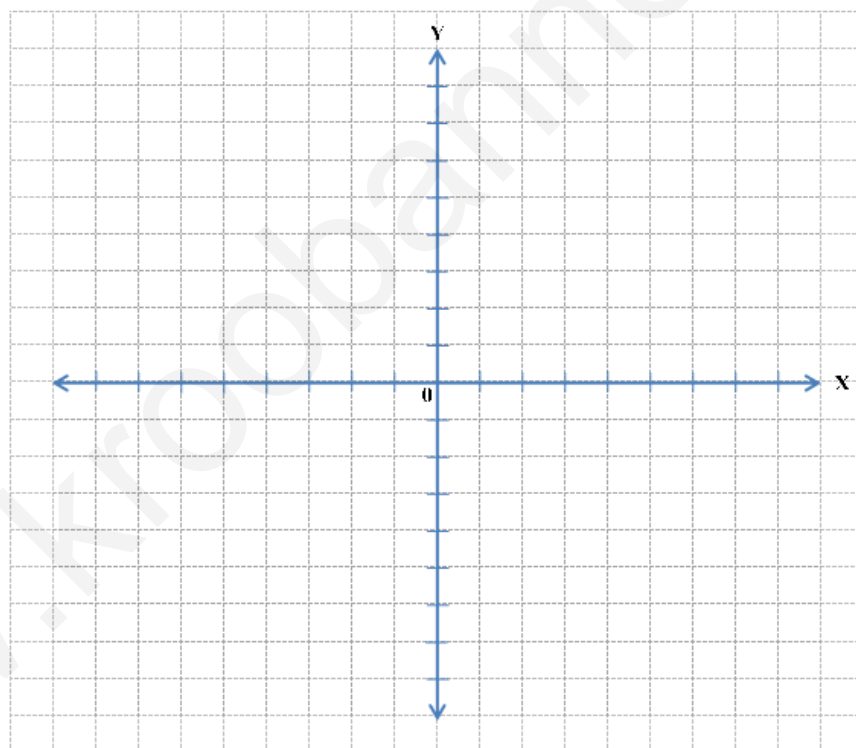
.....

.....

.....

.....

เขียนกราฟได้คือ



4. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 225 = 0\}$

วิธีทำ

.....

.....

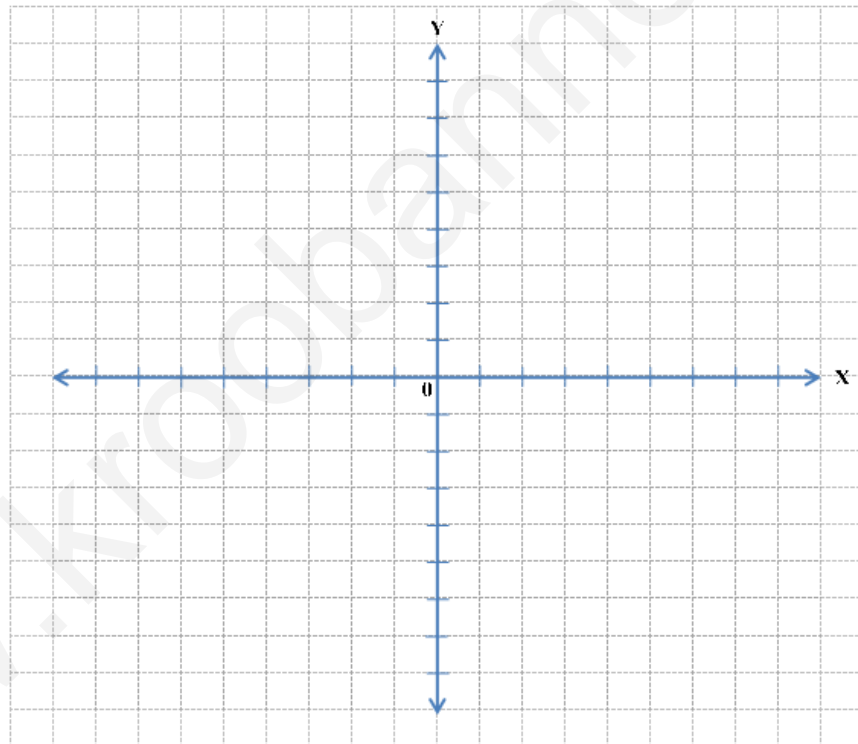
.....

.....

.....

.....

เขียนกราฟได้คือ



5. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 18 = 0\}$

วิธีทำ

.....

.....

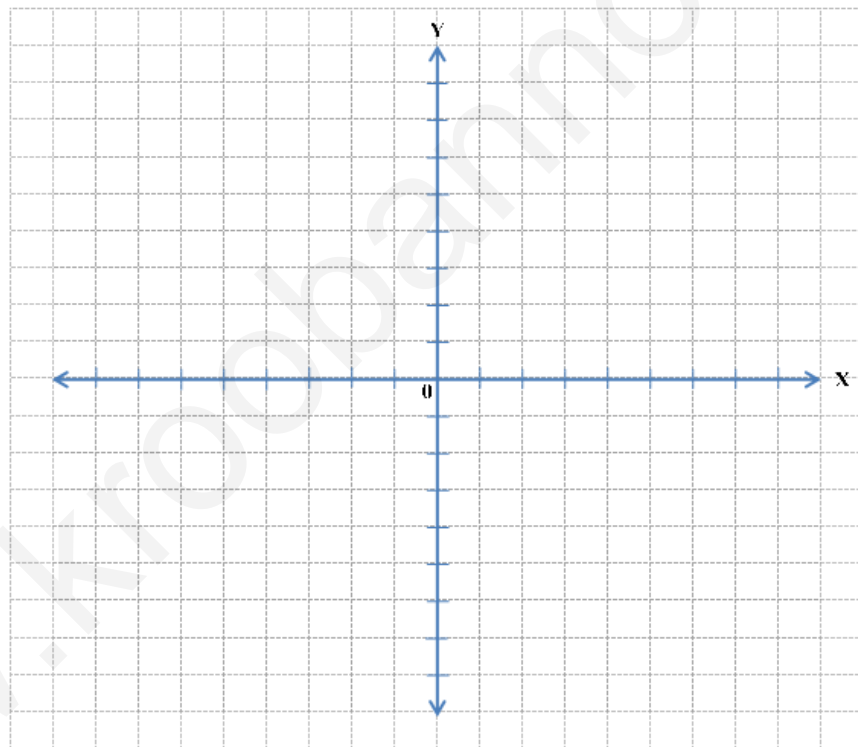
.....

.....

.....

.....

เขียนกราฟได้คือ



ใบงานที่ 1.4 (กิจกรรมเสริมนอกเวลาเรียน)

การหาส่วนประกอบของวงกลม ที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$

1. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

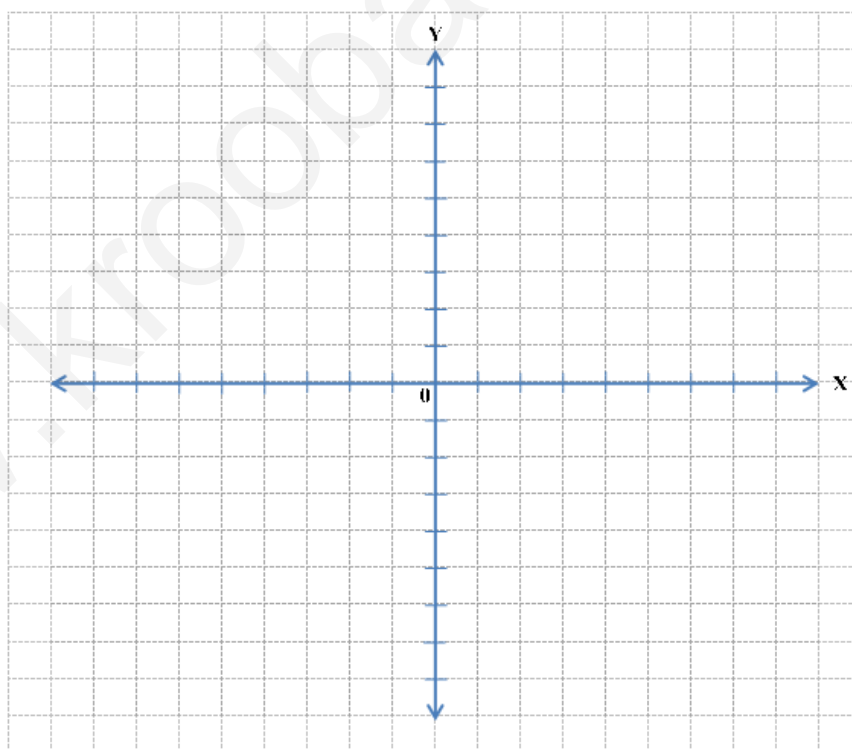
1.1 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 9\}$

วิธีทำ จากโจทย์ สมการคือ

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 =$$

เขียนกราฟได้คือ



$$1.2 \quad \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 11\}$$

วิธีทำ

.....

.....

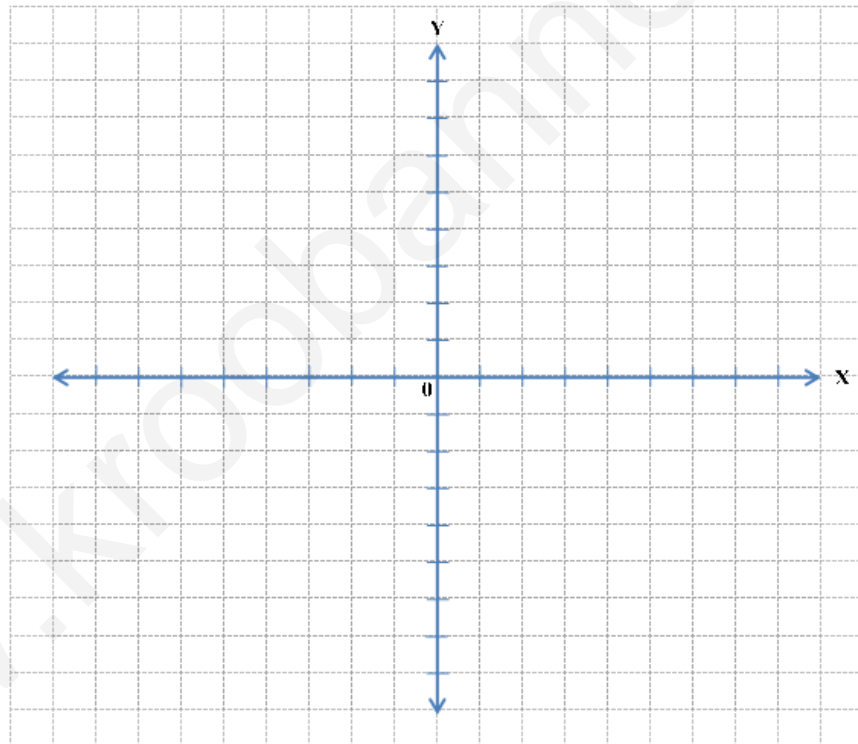
.....

.....

.....

.....

เขียนกราฟได้คือ



3. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 64 = 0\}$

วิธีทำ

จากโจทย์ สมการคือ

$$x^2 + y^2 - 64 = 0$$

$$x^2 + y^2 = \dots\dots\dots$$

.....

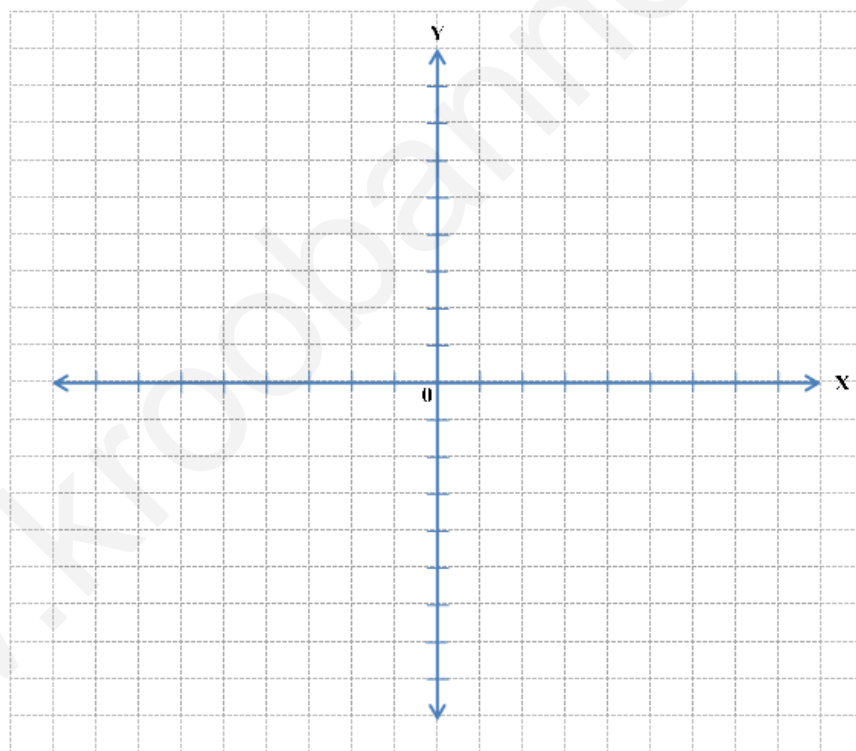
.....

.....

.....

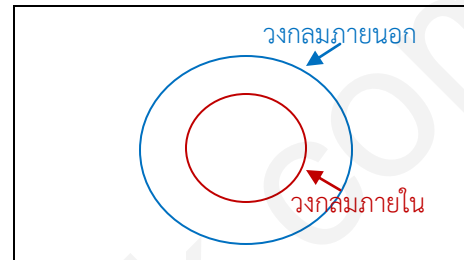
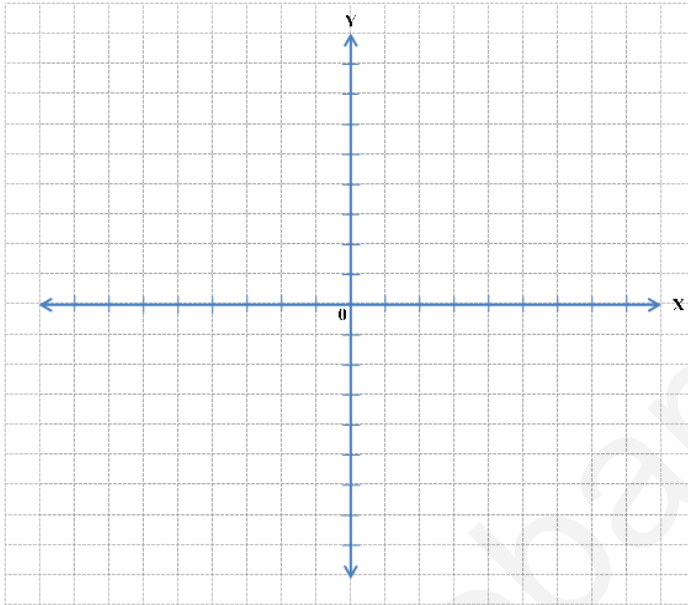
.....

เขียนกราฟได้คือ



2. ขนมของชาวไทยใหญ่ชนิดหนึ่ง ภาษาไทยใหญ่ เรียกว่า “ข้าวมูนช่วย” (ขนมวง) มีลักษณะเป็นรูปวงกลม ดังรูป ถ้ากำหนดให้จุดศูนย์กลางของ “ข้าวมูนช่วย” (ขนมวง) อยู่ที่จุด $(0, 0)$ ซึ่งลักษณะของวงกลมภายนอกมีขนาดตามสมการคือ $x^2 + y^2 = 16$ และ ลักษณะของวงกลมภายในมีขนาดตามสมการคือ $x^2 + y^2 = 4$ จงหาความยาวของรัศมีภายนอกและรัศมีภายในของ “ข้าวมูนช่วย” (ขนมวง) นี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟของวงกลม

วิธีทำ



ตัวอย่าง “ข้าวมูนช่วย” (ขนมวง)



ใบงานที่ 1.5

การเขียนกราฟของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ ด้วยโปรแกรม GSP

กลุ่มที่

สมาชิกกลุ่ม

- 1.....ประธาน
- 2.....รองประธาน
- 3.....สมาชิก
- 4.....สมาชิก
- 5.....เลขานุการ

คำชี้แจง

ให้แต่ละกลุ่มช่วยกันตั้งใจเกี่ยวกับ วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ กลุ่มละ 2 ชื่อ จากนั้นแสดงวิธีการหาคำตอบ (เขียนกราฟ) โดยใช้โปรแกรม GSP แล้วนำเสนอ พร้อมทั้งตั้งคำถาม 2 คำถามให้เพื่อนในห้องตอบ

แบบทดสอบที่ 1.2
หน่วยการเรียนรู้ ภาคตัดกรวย
เรื่อง การหาส่วนประกอบของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(0, 0)$
และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

คำชี้แจง ข้อสอบฉบับนี้เป็นแบบอัตนัยจำนวน 2 ข้อ เกี่ยวข้องกับหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(0, 0)$ และรัศมีเท่ากับ r หน่วย ให้นักเรียนทำด้วยตนเองเพื่อทดสอบความเข้าใจหลังจากทำกิจกรรมตามแบบฝึกทักษะที่ 1.2 ครบแล้ว โดยทำการแสดงวิธีทำลงในกระดาษคำตอบเท่านั้น (ข้อละ 5 คะแนน)

1. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟของความสัมพันธ์
 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 49\}$
2. จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟ
 ของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 64 = 0\}$



กระดาษคำตอบแบบทดสอบที่ 1.2

เรื่อง การหาส่วนประกอบของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(0, 0)$
และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

ชื่อ.....นามสกุล.....ชั้น ม.เลขที่.....

1. จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟของความสัมพันธ์

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 9\}$$

.....

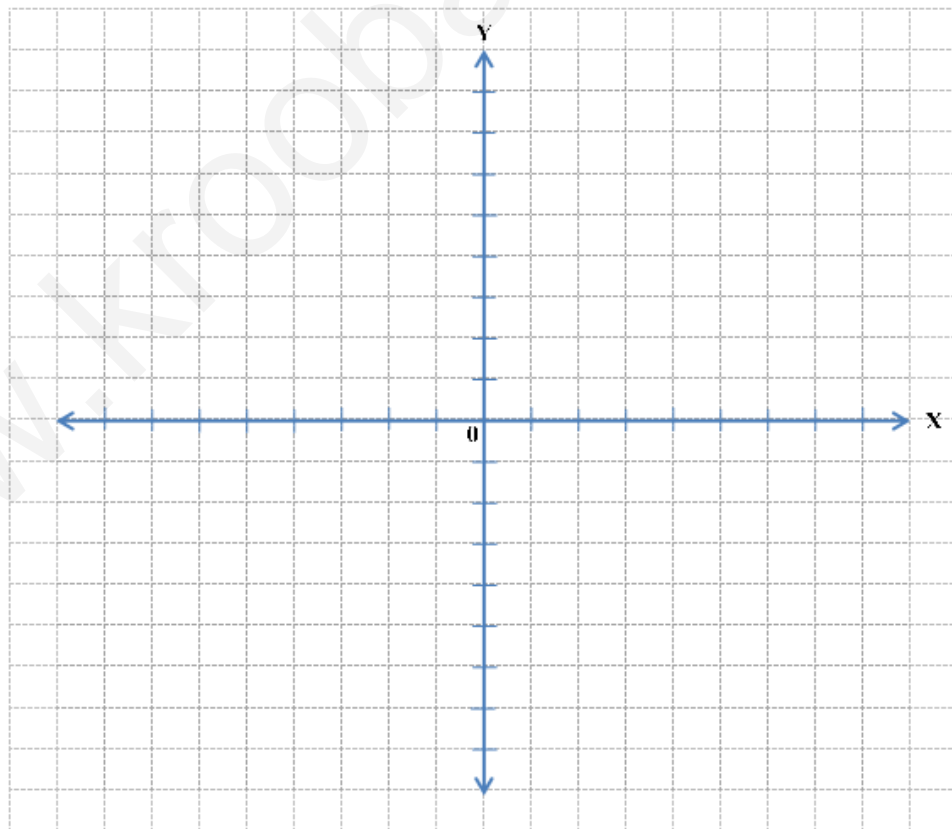
.....

.....

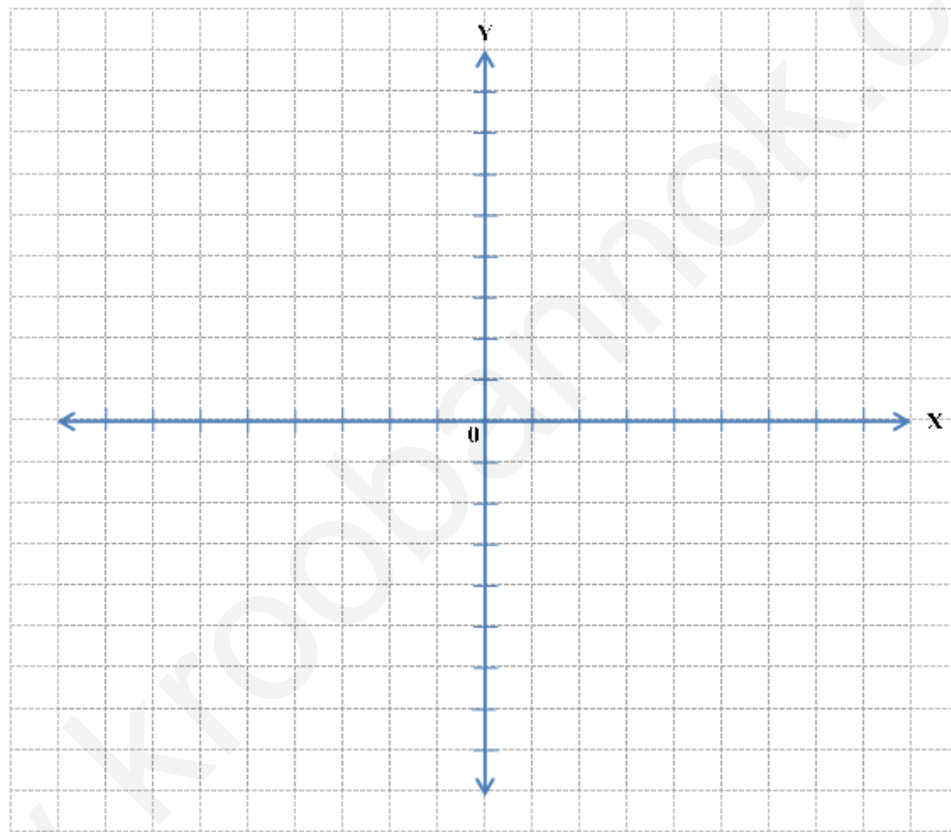
.....

.....

เขียนกราฟได้คือ



2. จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) | x^2 + y^2 - 64 = 0\}$



คะแนนที่ได้ / คะแนนเต็ม



พอใจมาก

พอใจปานกลาง

พอใจน้อย

หมายเหตุ : ให้นักเรียนบอกระดับความพึงพอใจของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบ

กิจกรรมเสนอแนะสำหรับนักเรียนที่คะแนนไม่ผ่านเกณฑ์และคนเก่ง

กิจกรรมเสนอแนะสำหรับนักเรียนที่คะแนนไม่ผ่านเกณฑ์

1. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม ซึ่งมีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่ที่ $(7, 0)$ และ $(-7, 0)$
2. จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 16 = 0\}$

กิจกรรมเสนอแนะสำหรับนักเรียนคนเก่ง

1. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม ซึ่งมีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่ที่ $(3, 4)$ และ $(-3, -4)$
2. จงหาความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(0, 0)$ และเส้นรอบวงยาว 14π หน่วย

ศึกษาเข้าใจแล้ว
นักเรียนมาทำแบบทดสอบหลังเรียนนะคะ



แบบทดสอบหลังเรียน (Post - test)

ชุดฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชุดที่ 1 เรื่อง วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0)
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

คำชี้แจง ให้นักเรียนอ่านคำถามต่อไปนี้ทีละข้อ แล้วทำเครื่องหมายกากบาทลงในกระดาษคำตอบในตัวเลือก ก ข ค ง ที่นักเรียนเห็นว่าถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ใช้เวลาทำแบบทดสอบ 15 นาที

1. ข้อใดเป็นความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0) และรัศมีของวงกลมยาว 9 หน่วย

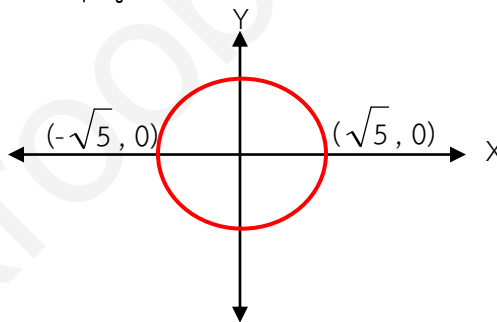
ก . $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 9\}$

ข. $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 19\}$

ค. $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 81\}$

ง. $\{(x, y) | x^2 + y^2 = \sqrt{9}\}$

2. ข้อใดเป็นสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0) และรัศมีของวงกลมยาว $\sqrt{5}$ หน่วย



ก . $x^2 + y^2 = 5$

ข. $x^2 + y^2 = 10$

ค. $x^2 + y^2 = 25$

ง. $x^2 + y^2 = \sqrt{5}$

3. ข้อใดเป็นสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดและความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางยาว $2\sqrt{7}$ หน่วย

ก . $x^2 + y^2 = \sqrt{7}$

ข. $x^2 + y^2 = 7$

ค. $x^2 + y^2 = 49$

ง. $x^2 + y^2 = 14$

4. ข้อใดเป็นสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดและจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่ $(7, 0)$ และ $(-7, 0)$

ก . $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = \sqrt{5}\}$

ข. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 7\}$

ค. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 49\}$

ง. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 14\}$

5. ข้อใดเป็นสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดและเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมยาว $\sqrt{16}$ หน่วย

ก . $x^2 + y^2 = \sqrt{16}$

ข. $x^2 + y^2 = 16$

ค. $x^2 + y^2 = \sqrt{4}$

ง. $x^2 + y^2 = 4$

6. จากความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 16\}$ วงกลมจะมีจุดศูนย์กลางและรัศมีตรงกับข้อใด

ก. จุดศูนย์กลาง $(0, 0)$, รัศมียาว 4 หน่วย

ข. จุดศูนย์กลาง $(0, 0)$, รัศมียาว 8 หน่วย

ค. จุดศูนย์กลาง $(0, 0)$, รัศมียาว 16 หน่วย

ง. ไม่มีข้อใดถูก

7. วงกลมมีสมการ $x^2 + y^2 - 15 = 0$ วงกลมจะมีจุดศูนย์กลางและรัศมีตรงกับข้อใด

ก. จุดศูนย์กลาง $(0, 0)$, รัศมียาว 15 หน่วย

ข. จุดศูนย์กลาง $(0, 0)$, รัศมียาว 7.5 หน่วย

ค. จุดศูนย์กลาง $(0, 0)$, รัศมียาว $\sqrt{15}$ หน่วย

ง. จุดศูนย์กลาง $(0, 0)$, รัศมียาว $\sqrt{7.5}$ หน่วย

8. จากความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 100\}$ วงกลมจะมีจุดศูนย์กลางและรัศมีตรงกับข้อใด

ก. จุดศูนย์กลาง $(0, 0)$, รัศมียาว 100 หน่วย

ข. จุดศูนย์กลาง $(0, 0)$, รัศมียาว 10 หน่วย

ค. จุดศูนย์กลาง $(0, 0)$, รัศมียาว 50 หน่วย

ง. จุดศูนย์กลาง $(0, 0)$, รัศมียาว $\sqrt{50}$ หน่วย

9. จากความสัมพันธ์ $\{(x, y) | x^2 + y^2 - 100 = 0\}$ ข้อใดกล่าวไม่ถูกต้อง
- ก. วงกลมมีรัศมียาว 10 หน่วย
 - ข. วงกลมมีรัศมียาว 50 หน่วย
 - ค. วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และจุด (8, 6) เป็นจุดที่อยู่บนวงกลม
 - ง. วงกลมมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 20 หน่วย

10. ข้อใดกล่าวถูกต้อง

- ก. วงกลมที่มีสมการ $x^2 + y^2 - 4 = 0$ จะรัศมียาว 2 หน่วย
- ข. วงกลมที่มีสมการ $x^2 + y^2 = 5$ จะรัศมียาว 5 หน่วย
- ค. สมการวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และ รัศมียาว $\sqrt{7}$ คือ $x^2 + y^2 = \sqrt{7}$
- ง. สมการวงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 9 หน่วย คือ $x^2 + y^2 = 4.5$



ตรวจสอบความเรียบร้อยถูกต้อง
ก่อนส่งคุณครูค่ะ

กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียนชุดฝึกทักษะที่ 1
เรื่อง วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0)

ชื่อ.....นามสกุล.....ชั้น ม.....เลขที่.....

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

คะแนนที่ได้ / คะแนนเต็ม



พอใจมาก

พอใจปานกลาง

พอใจน้อย

หมายเหตุ : ให้นักเรียนบอกระดับความพึงพอใจของคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบ

ลงชื่อ ผู้ประเมิน

(.....)

วันที่ เดือน พ.ศ.....

บรรณานุกรม

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง.คู่มือสาระการเรียนรู้พื้นฐานและเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ม.4 เล่ม 2.

กรุงเทพมหานคร: พ.ศ.พัฒนาจำกัด,2544.

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. แบบฝึกคณิตศาสตร์เพิ่มเติมม.4. กรุงเทพมหานคร :แม็ค,2544.

สงบ ศิริบุรณ์. แบบฝึกการเรียนรู้และเสริมประสบการณ์คณิตศาสตร์ม.4 ค012.กรุงเทพมหานคร :

มัลติมีเดีย พับลิเชอร์ส.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม

คณิตศาสตร์เล่ม 2 ม.4.กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์สกสค,2545.

_____. หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 2 ม.4. กรุงเทพมหานคร :

โรงพิมพ์สกสค ,2551.