ใบความรู้ที่ 1

ภาคตัดกรวย วงกลม

ภาคตัดกรวย

ภาคตัดกรวย (conic section หรือ conic) ในทางคณิตศาสตร์ หมายถึง เส้นโค้งที่ได้จากการตัดพื้นผิวกรวยกลม ด้วยระนาบแบน ภาคตัดกรวยนี้ถูกตั้งเป็นหัวข้อศึกษาตั้งแต่สมัย 200 ปี ก่อนคริสต์ศักราช โดย อพอลโลเนียส แห่ง เพอร์กา ผู้ซึ่งศึกษาภาคตัดกรวยและค้นพบสมบัติหลายประการของภาคตัดกรวย ต่อมากรณีการศึกษาภาคตัดกรวยถูกนำไปใช้ประโยชน์หลายแบบได้แก่ ในปี พ.ศ. 2133 (ค.ศ. 1590) กาลิเลโอ กาลิเลอี พบว่าขีปนาวุธที่ยิ่งขึ้นไปในมุมที่กำหนดมีวิถีการเคลื่อนที่โค้งแบบพาราโบลา ในปี พ.ศ. 2152 (ค.ศ. 1609) โยฮันส์ เคปเลอร์ พบว่าวงโคจรของดาวเคราะห์รอบนอกเป็นรูปวงรี เป็นต้น

หลังจากศึกษาที่มาและความหมาย

ของภาคตัดกรวยแล้วไปศึกษากันต่อ

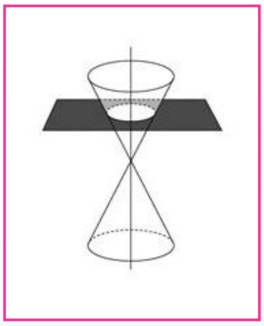
ในหน้าถัดไปเลยครับ

ใบความรู้ที่ 1 (ต่อ)

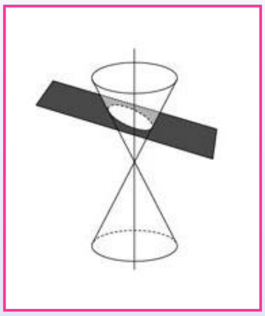
ภาคตัดกรวย วงกลม

ซึ่งเส้นโค้งที่เกิดจากการนำระนาบตัดกรวยกลมตรง มี 4 ลักษณะ ดังนี้

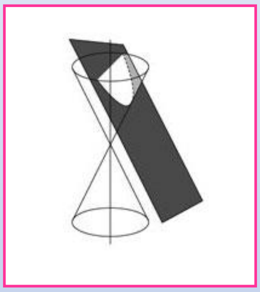
1. ระนาบที่ตัดขนานกับฐานของกรวยจะได้ภาคตัดกรวยดังรูป รอยตัดกรวยดังรูป ซึ่งรอยตัดที่เกิดขึ้นนั้นจะเป็นรอยตัดรูป **วงกลม (Circle)**



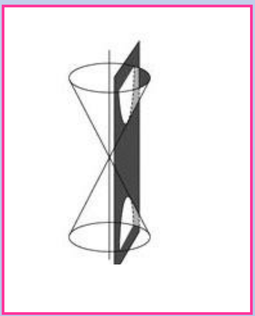
2. ระนาบที่ตัดไม่ขนานกับฐานของกรวย และไม่ขนานกันกับสูงเอียงของกรวยจะได้ภาคตัดกรวยดังรูป ซึ่งรอยตัดที่เกิดขึ้นนั้นเป็นรอยตัดรูป **วงรี (Ellipse)**



3. ระนาบที่ตัดขนานกับสูงเอียงของกรวยจะได้ภาคตัดกรวยดังรูป ซึ่งรอยตัดที่เกิดขึ้นนั้นจะเป็นรอยตัดรูป **พาราโบลา (Parabola)**



4. ระนาบที่ตัดขนานกับสูงตรงของกรวยจะได้ภาคตัดกรวยดังรูป ซึ่งมีรอยตัดที่เกิดขึ้นนั้นจะเป็นรอยตัดที่เกิดขึ้นนั้นจะเป็นรอยตัดรูป **ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)**



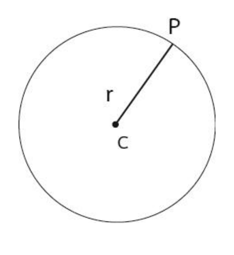
ใบความรู้ที่ 2

ภาคตัดกรวย วงกลม

นิยาม

วงกลม คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง บนระนาบเป็นระยะทางเท่ากัน และจุดคงที่เรียกว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม ระยะห่างที่เท่ากันเรียกว่า **ความยาวรัศมีของวงกลม**

พิจารณารูปต่อไปนี้

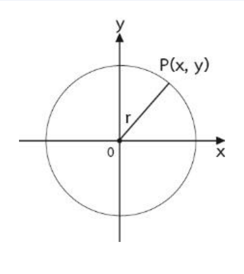


โดยให้ C เป็นจุดศูนย์กลาง

และ P เป็นจุดใดๆ บนวงกลม

จากนิยามจะได้ว่า CP = r หรือความยาวรัศมีของวงกลม

พิจารณารูปต่อไปนี้



จากสูตรระยะห่างระหว่างจุดสองจุดจะได้ว่า

$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$

ยกกำลัง 2 ทั้งสองข้าง จะได้

$r^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2$

$r^2 = x^2 + y^2$

หรือ $x^2 + y^2 = r^2$

ซึ่งเรียกสมการนี้ว่าสมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0) และรัศมียาว r ดังนั้นสมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0) และรัศมียาว r คือ $x^2 + y^2 = r^2$

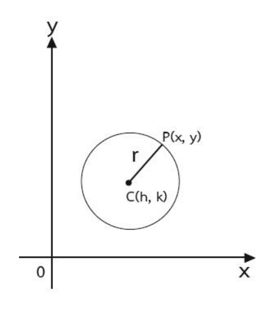
หรือเขียนให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์ได้ว่า

$$\boxed{\left\{(x, y) \in R \times R \,\middle|\, x^2 + y^2 = r^2\right\}}$$

ใบความรู้ที่ 3

ภาคตัดกรวย วงกลม

พิจารณารูปต่อไปนี้



จากสูตรระยะห่างระหว่างจุดสองจุดจะได้ว่า

$r = \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$

ยกกำลัง 2 ทั้งสองข้างจะได้

$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$

ซึ่งเรียกสมการนี้ว่าสมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) และรัศมียาว r

ดังนั้นสมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h,k) และรัศมียาว r คือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์ได้ว่า

$$\boxed{\left\{(x,y) \in R \times R \,\middle|\, (x-h)^2+(y-k)^2 = r^2\right\}}$$

ใบความรู้ที่ 4

ภาคตัดกรวย วงกลม

จากสมการรูปของมาตรฐานของวงกลมที่มีศูนย์กลางที่ (h,k) และรัศมียาว r

คือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

เมื่อใช้ความรู้เรื่องพีชคณิตแล้วจะได้

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$ 1

ถ้ากำหนดให้ $A = -2h$, $B = -2k$ และ $C = h^2 + k^2 - r^2$ แล้วจะได้

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

ซึ่งเรียกว่าสมการนี้ว่า *สมการรูปทั่วไปของวงกลม*

จากจุดศูนย์กลางของวงกลมคือ (h, k) และ $A = -2h$, $B = -2k$

ดังนั้น จะได้ $h = -\frac{A}{2}$ และ $k = -\frac{B}{2}$

เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k) คือ $\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right)$ 2

จากความยาวรัศมีของวงกลมคือ r และ $C^2 = h^2 + k^2 - r^2$

ดังนั้น จะได้

$$\begin{aligned} r^2 &= h^2 + k^2 - C \\ &= \left(-\frac{A}{2}\right)^2 + \left(-\frac{B}{2}\right)^2 - C \\ &= \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C \\ r^2 &= \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} \end{aligned}$$

ดังนั้น $r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$ เมื่อ $A^2 + B^2 - 4C > 0$ 3

สรุป

สมการรูปทั่วไปทั่วไปของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) และรัศมียาว r คือ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ โดยที่จุดศูนย์กลาง (h, k) คือ $\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right)$ และความยาวของรัศมี (r) คือ $\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$ เมื่อ $A^2 + B^2 - 4C > 0$