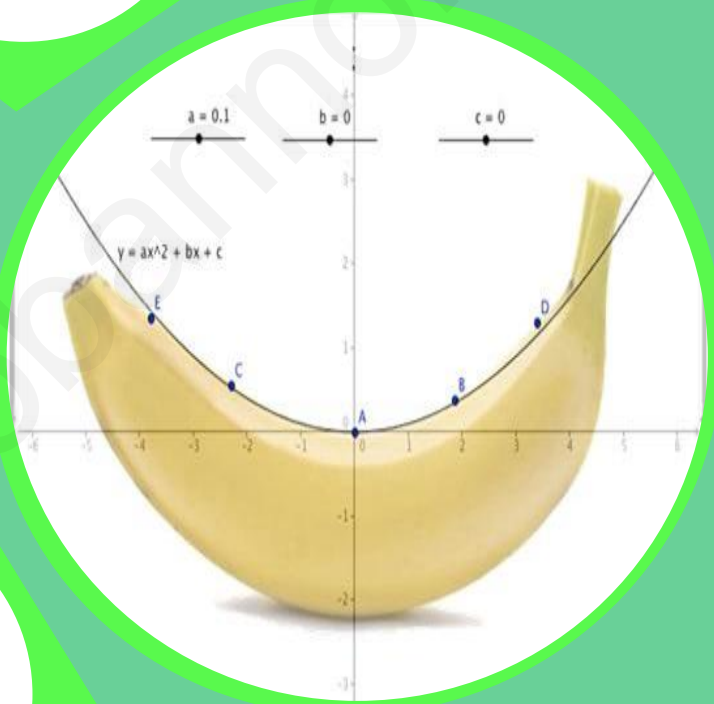
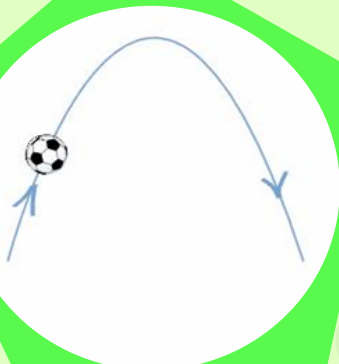
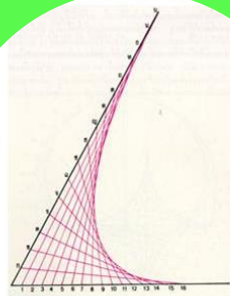


ชุดการสอนภาคตัดกรวย

เล่มที่ 2 เรื่องพาราโบลา

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4



นางสาวปิยดา ปวงฟู

โรงเรียนปายวิทยาคาร อำเภอปาย

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 34

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

ชุดการสอนภาคตัดกรวย

เล่มที่ 2 เรื่องพาราโบลา

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

นางสาวปิยดา ปวงฟู

โรงเรียนปายวิทยาคาร อำเภอปาย

สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 34

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

ชุดการสอนภาคตัดกรวย เล่มที่ 2 เรื่องพาราโบลา กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จัดทำขึ้นเพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาการจัดการเรียนการสอนตามกระบวนการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ ซึ่งเป็นการพัฒนานักเรียนให้ได้รับความรู้และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ปฏิบัติให้นักเรียนรู้จักใช้ความคิดของตนเอง สามารถสืบเสาะหาความรู้จากแหล่งเรียนรู้ทั้งในและนอกห้องเรียนและสามารถวิเคราะห์ข้อมูลได้ด้วยตนเอง โดยใช้ชุดการสอนภาคตัดกรวย เล่มที่ 2 เรื่องพาราโบลา ซึ่งประกอบด้วย คำนำ คำชี้แจง มาตรฐาน ตัวชี้วัด จุดประสงค์การเรียนรู้ แบบทดสอบก่อนเรียน ใบความรู้ ใบกิจกรรม แบบฝึกหัด และแบบทดสอบหลังเรียน จึงหวังเป็นอย่างยิ่งว่าชุดการสอนภาคตัดกรวย เล่มที่ 2 เรื่องพาราโบลา เล่มนี้เป็นสื่อการสอนที่มีประสิทธิภาพและเป็นประโยชน์ต่อนักเรียนมากที่สุด

ปิยดา วงศ์ฟู

คำชี้แจง

ชุดการสอนภาคตัดกรวย เล่มที่ 2 เรื่องพาราโบลา กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จัดทำขึ้น เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาการจัดการเรียนการสอนตามกระบวนการการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้ ซึ่งเป็นการพัฒนาให้นักเรียนได้รับความรู้และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ให้นักเรียนได้รู้จักสารในชีวิตประจำวัน โดยใช้ความคิดของตนเองสามารถสืบเสาะหาความรู้จากแหล่งเรียนรู้ทั้งในและนอกห้องเรียนสามารถวิเคราะห์ข้อมูลได้ด้วยตนเอง และสามารถสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเอง

ลักษณะของชุดการสอนภาคตัดกรวย

ชุดการสอนภาคตัดกรวย มีจำนวนทั้งสิ้น 4 ชุด ชุดการสอนภาคตัดกรวย เล่มที่ 2 เรื่องพาราโบลา กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ซึ่งแต่ละชุดจะประกอบไปด้วย มาตรฐาน ตัวชี้วัด จุดประสงค์การเรียนรู้ แบบทดสอบก่อนเรียน ใบความรู้ ใบกิจกรรม แบบฝึกหัด และแบบทดสอบหลังเรียนพร้อมเฉลย โดยจะเรียงเนื้อหาจากง่ายไปหายาก และในแต่ละชุด จะมีรูปภาพประกอบ สีสดใสสวยงาม เหมาะสมกับเนื้อหาและวัยของนักเรียน


 สารบัญ

	หน้า
คำนำ	ก
คำชี้แจง	ข
สารบัญ	ค
คำแนะนำการใช้ชุดการสอนสำหรับนักเรียน	จ
ผลการเรียนรู้	ฉ
คำแนะนำชุดการสอนภาคตัดกรวย เล่มที่ 2 เรื่องพาราโบลา	ซ
แบบทดสอบก่อนเรียน	1
ใบความรู้ที่ 1 พาราโบลา	5
ใบกิจกรรมที่ 1	8
ใบความรู้ที่ 2	9
ใบกิจกรรมที่ 2	10
ใบความรู้ที่ 3	11
ใบกิจกรรมที่ 3	12
ใบความรู้ที่ 4	14
ใบกิจกรรมที่ 4	15
แบบฝึกหัดที่ 1.1	17
แบบทดสอบหลังเรียน	19
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน	22
เฉลยใบกิจกรรมที่ 1	23
เฉลยใบกิจกรรมที่ 2	25
เฉลยใบกิจกรรมที่ 3	26



สารบัญ

	หน้า
เฉลยใบกิจกรรมที่ 4	28
เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1.1	30
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน	32
บรรณานุกรม	33

คำแนะนำการใช้ชุดการสอนสำหรับนักเรียน

ชุดการสอนภาคตัดกรวย เล่มที่ 2 เรื่องพาราโบลา กลุ่มสาระการเรียนรู้
คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ก่อนที่นักเรียนจะทำกิจกรรมกลุ่ม ให้ศึกษาสิ่งต่อไปนี้

1. ชุดการสอนภาคตัดกรวย เล่มที่ 2 เรื่องพาราโบนานี้ ใช้เวลาในการทำกิจกรรม 5 ชั่วโมง
2. ชุดการสอนภาคตัดกรวย เล่มที่ 1 เรื่องวงกลมประกอบด้วย

2.1 แบบทดสอบก่อนเรียน	จำนวน 1 ชุด
2.2 ใบความรู้	จำนวน 4 ชุด
2.3 ใบกิจกรรม	จำนวน 4 ชุด
2.4 แบบฝึกหัด	จำนวน 1 ชุด
2.5 แบบทดสอบหลังเรียน	จำนวน 1 ชุด
3. ตัวแทนกลุ่มแจก ชุดการสอนภาคตัดกรวย เล่มที่ 2 เรื่องพาราโบลา ที่ได้รับให้รับสมาชิก
4. ดำเนินการตาม ชุดการสอนภาคตัดกรวย เล่มที่ 2 เรื่องพาราโบลา ที่ได้รับตามลำดับขั้นตอนที่กำหนด
5. ขณะที่นักเรียนดำเนินการตามชุดการสอนอยู่นั้น เมื่อมีปัญหาให้ปรึกษาและเปลี่ยนเรียนรู้ซึ่งกันและกันในกลุ่ม หากแก้ปัญหาที่เกิดขึ้นไม่ได้ให้แจ้งครูผู้สอน เพื่อขอความช่วยเหลือต่อไป
6. การประเมินผลการปฏิบัติกิจกรรมของนักเรียนแต่ละกลุ่ม ครูผู้สอนเป็นผู้ประเมินโดยใช้เกณฑ์ การประเมินจากคู่มือการใช้ชุดการสอน

ผลการเรียนรู้

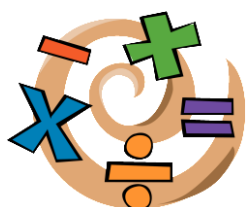
1. อธิบายการความสัมพันธ์ของพาราโบลา จุดยอด จุดโฟกัส สมการเส้นไดเรกทริกซ์ และความยาวเส้นลาตัสเรกตัม การหาสมการพาราโบลาได้ (K)
2. สื่อสารและนำความรู้เรื่องพาราโบลาไปใช้ในชีวิตประจำวันได้ (P)
3. มีระเบียบวินัย ใฝ่รู้ใฝ่เรียน มุ่งมั่นในการทำงาน และมีเจตคติที่ดีต่อทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (A)

คำแนะนำชุดการสอนภาคตัดกรวย

เล่มที่ 2 เรื่องพาราโบลา

1. นักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบก่อนเรียน ชุดการสอนภาคตัดกรวย เล่มที่ 2 เรื่องพาราโบลา
2. นักเรียนอ่านขั้นตอนการปฏิบัติกิจกรรม และทำความเข้าใจ
3. นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนในชุดการสอน
4. ศึกษาใบความรู้เพิ่มเติม
5. ตอบคำถามในใบกิจกรรม
6. ทำแบบฝึกหัด
7. นักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบหลังเรียน เรื่องพาราโบลา

แบบทดสอบก่อนเรียน
เล่มที่ 2 พาราโบลา



เล่มที่ 2 พาราโบลา
แบบทดสอบก่อนเรียน

คำชี้แจง แบบทดสอบนี้เป็นแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดลงในกระดาษคำตอบ

1. ข้อใดคือสมการของพาราโบลาที่มี ไคเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $x = 12$ และโฟกัสอยู่ที่จุด $(2, 0)$

ก. $y^2 = 8x$

ข. $x^2 = 2y$

ค. $y^2 = -8x$

ง. $x^2 = -12y$

2. ข้อใดคือสมการของพาราโบลาที่มี ไคเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $y = -3$ และโฟกัสอยู่ที่จุด $(0, 3)$

ก. $x^2 = -12y$

ข. $y^2 = -8x$

ค. $y^2 = -12x$

ง. $x^2 = 12y$

3. ข้อใดคือสมการของพาราโบลาที่มี ไคเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $x = 4$ และโฟกัสอยู่ที่จุด $(-4, 0)$

ก. $y^2 = 16x$

ข. $y^2 = -16x$

ค. $x^2 = 16y$

ง. $x^2 = -16y$



4. ข้อใดคือสมการของพาราโบลาที่มี ไคเรตริกซ์ คือ เส้นตรง $y = -4$ และโฟกัส อยู่ที่จุด $(2, -2)$

ก. $x^2 - 4x + 4y - 4 = 0$

ข. $x^2 + 4x + 4y + 8 = 0$

ค. $x^2 - 4x - 4y - 8 = 0$

ง. $x^2 + 4x - 4y + 4 = 0$



5. ข้อใดคือสมการของพาราโบลาที่มี ไคเรตริกซ์ คือ เส้นตรง $x = 1$ และโฟกัส อยู่ที่จุด $(-5, 2)$

ก. $y^2 - 12y + 4x + 28 = 0$

ข. $y^2 - 4y + 4x + 28 = 0$

ค. $y^2 + 12y - 4x - 28 = 0$

ง. $y^2 + 4y - 12x + 28 = 0$

6. พาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่ จุด $(-2, -6)$ และโฟกัสอยู่ที่จุด $(-2, -2)$ สมการไคเรตริกซ์ ตรงกับข้อใด

ก. $y = 10$

ข. $x = 10$

ค. $y = -10$

ง. $x = -10$

7. พาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่ จุด $(2, 3)$ มีแกนพาราโบลานานแกน y ผ่านจุด $(4, 5)$ สมการพาราโบลา ตรงกับข้อใด

ก. $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$

ข. $x^2 - 4x + 12y - 10 = 0$

ค. $x^2 + 4x - 2y - 10 = 0$

ง. $x^2 - 2x - 4y + 10 = 0$



8. จากสมการ $y^2 - 12x = 0$ จุดยอด และจุดโฟกัส ของพาราโบลาตรงกับข้อใด

- ก. จุดยอด คือ $(0,0)$ จุดโฟกัส คือ $(3,0)$
- ข. จุดยอด คือ $(0,0)$ จุดโฟกัส คือ $(-3,0)$
- ค. จุดยอด คือ $(0,0)$ จุดโฟกัส คือ $(0,3)$
- ง. จุดยอด คือ $(0,0)$ จุดโฟกัส คือ $(0,-3)$

9. จากสมการ $y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$ จุดยอด และจุดโฟกัส ของพาราโบลาตรงกับข้อใด

- ก. จุดยอด คือ $(1,2)$ จุดโฟกัส คือ $(1,1)$
- ข. จุดยอด คือ $(2,1)$ จุดโฟกัส คือ $(1,1)$
- ค. จุดยอด คือ $(1,1)$ จุดโฟกัส คือ $(1,2)$
- ง. จุดยอด คือ $(1,1)$ จุดโฟกัส คือ $(2,1)$

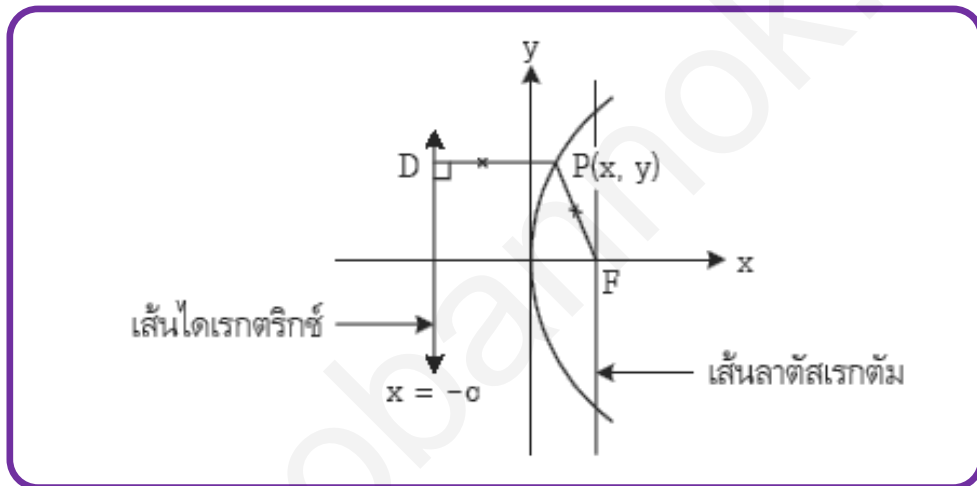
10. จากสมการ $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$ จุดยอด และสมการไคเรกตริกซ์ ตรงกับข้อใด

- ก. จุดยอด คือ $(-3,2)$ สมการไคเรกตริกซ์ $x = -1$
- ข. จุดยอด คือ $(-3,-2)$ สมการไคเรกตริกซ์ $x = 1$
- ค. จุดยอด คือ $(3,-2)$ สมการไคเรกตริกซ์ $x = -1$
- ง. จุดยอด คือ $(3,2)$ สมการไคเรกตริกซ์ $x = 1$

ใบความรู้ที่ 1 พาราโบลา

บทนิยาม

พาราโบลา คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรงที่
เส้นหนึ่งบนระนาบและจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบนอกเส้นตรงคงที่นั้น เป็น
ระยะทางเท่ากับเสมอ



- จุดคงที่ เรียกว่า โฟกัส (focus) ของพาราโบลา
- เส้นตรงที่คงที่ คือ เส้นบังคับ หรือเส้นไดเรกตริกซ์ (Directrix)
- เส้นตรงที่ลากผ่านจุดโฟกัส และตั้งฉากกับ ไดเรกตริกซ์ คือ แกน

ของพาราโบลา หรือแกนสมมาตร (axis of symmetry)

- จุดที่แกนพาราโบลาตัดเส้นโค้งของพาราโบลา คือ จุดยอด (vertex)

ของพาราโบลา

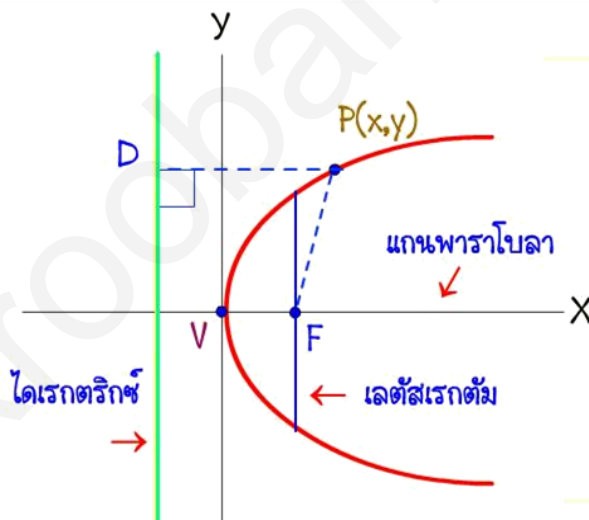
- ส่วนของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดโฟกัส และตั้งฉากกับแกนของพาราโบลา โดยจุดปลายทั้งสองอยู่บนโค้งของพาราโบลา เรียกว่า ลาตัสเรกตัม (Latus Rectum)
- รูปแบบสมการ มี 2 รูปแบบใหญ่ๆ คือ

1. สมการ $y = ax^2 + bx + c$
2. สมการ $y = a(x - h)^2 + k$

สรุปสมการพาราโบลาได้ดังนี้

$x^2 = 4cy$	จุดศูนย์กลาง	$y^2 = 4cx$
$v(0, 0)$	จุดยอด	$v(0, 0)$
$F(0, c)$	จุด Focus	$F(0, c)$
$y = -c$	สมการเส้นไดเรกทริกซ์	$x = -c$
$ 4c $	ความยาวเส้นลาตัสเรกตัม	$ 4c $
รูปหงาย (เปิดบน)	ถ้า $c > 0$	รูปตะแคงขวา (เปิดขวา)
รูปคว่ำ (เปิดล่าง)	ถ้า $c < 0$	รูปตะแคงซ้าย (เปิดซ้าย)
$(-2c, c), (2c, c)$	จุดปลายเส้นลาตัสเรกตัม	$(c, 2c), (c, -2c)$

ถ้า $P(x, y)$ บนจุดใดๆ บนกราฟของพาราโบลา จะได้ว่า $|PF| = |PD|$



1. สมการพาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$

1.1 เมื่อแกน x เป็นแกนสมมาตร

1.2 เมื่อแกน y เป็นแกนสมมาตร

2. สมการพาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

2.1 เมื่อแกนสมมาตรขนานกับแกน x

2.2 เมื่อแกนสมมาตรขนานกับแกน y

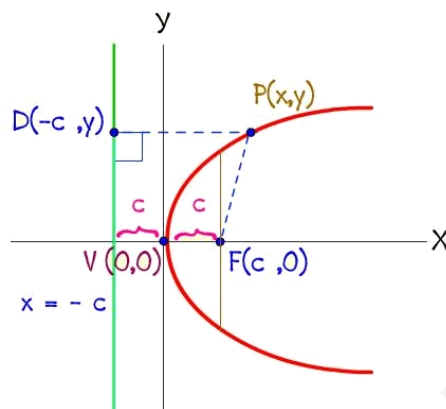
1. สมการพาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$

1.1 เมื่อแกน x เป็นแกนสมมาตร

สมการพาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ เมื่อแกน x เป็นแกนสมมาตร

ความสัมพันธ์ของกราฟ คือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = 4cx\}$

เป็นพาราโบลาที่มีแกนในแนวนอน แกน x หรือ เส้นตรง $y = 0$



- จุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$
 - จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(c, 0)$
 - สมการไดเรกทริกซ์ คือ $x = -c$
 - เลตัสเรกตัมยาว $= |4c|$ หน่วย
- สมการรูปมาตรฐานเป็น $y^2 = 4cx$

หมายเหตุ ถ้า $c > 0$ โค้งเปิดไปทางขวา
 ถ้า $c < 0$ โค้งเปิดไปทางซ้าย

ตัวอย่างที่ 1

จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไดเรกทริกซ์ และเขียนกราฟพาราโบลาจาก

สมการ $y^2 + 12x = 0$

วิธีทำ

$$y^2 + 12x = 0$$

$$y^2 = -12x$$

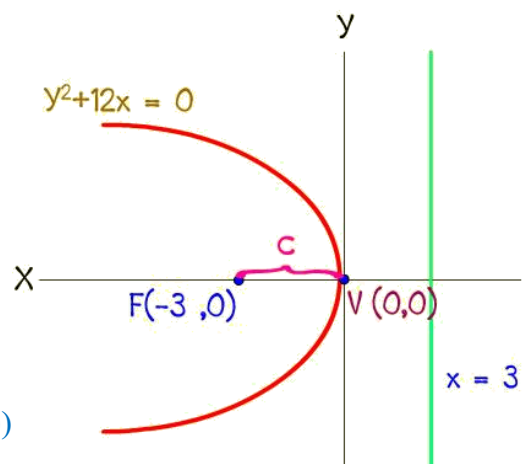
$$y^2 = 4(-3)x$$

จะได้ $c = -3$

เป็นพาราโบลาเปิดทางซ้าย

จุดยอด คือ $(0, 0)$ จุดโฟกัส คือ $(-3, 0)$

สมการไดเรกทริกซ์ คือ $x = -(-3) = 3$



ใบกิจกรรมที่ 1

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำและคำตอบลงในช่องว่างที่กำหนด

1. จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-5, 0)$ และ จุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$ จงหาสมการพาราโบลาและเขียนกราฟ

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

2. จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-3, 0)$ และ ไคเรกติกซ์ คือ $x = 3$ จงหาสมการพาราโบลาและเขียนกราฟ

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

3. จงหาสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอด $(0, 0)$ มีแกน x เป็นแกนพาราโบลา ความยาวของลาตัสเรกตัมเท่ากับ 12 หน่วย

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

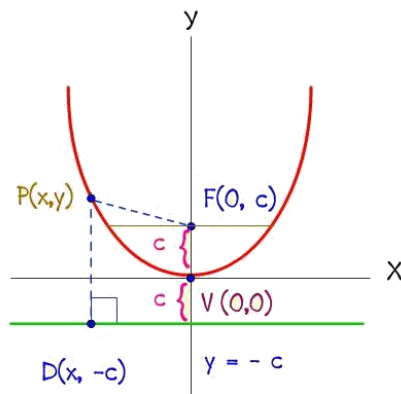
.....

ใบความรู้ที่ 2

1.2 เมื่อแกน y เป็นแกนสมมาตร

สมการพาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ เมื่อแกน y เป็นแกนสมมาตร
ความสัมพันธ์ของกราฟ คือ $\{(x,y) \in R \times R \mid x^2 = 4cy\}$

เป็นพาราโบลาที่มีแกนในแนวนอน แกน x หรือ เส้นตรง $y = 0$



- จุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$
 - จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(0, c)$
 - สมการไคเรตริกซ์ คือ $y = -c$
 - เลตัสเรกตัมยาว $= |4c|$ หน่วย
- สมการรูปมาตรฐานเป็น $x^2 = 4cy$

หมายเหตุ ถ้า $c > 0$ โค้งเปิดไปทางบน
ถ้า $c < 0$ โค้งเปิดไปทางล่าง

ตัวอย่างที่ 2

จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไคเรตริกซ์ และเขียนกราฟพาราโบลาจาก

สมการ $x^2 = 4y$

วิธีทำ

$$x^2 = 4y$$

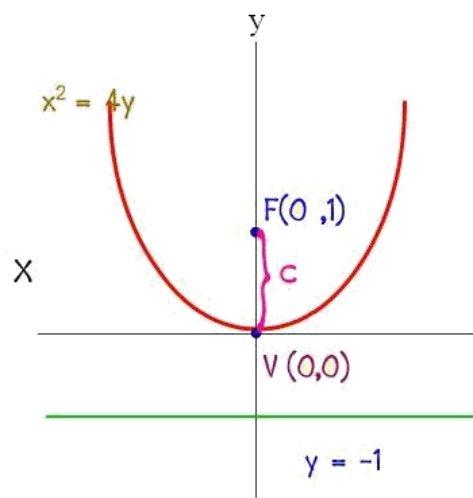
$$x^2 = 4(1)y$$

จะได้ $c = 1$

เป็นพาราโบลาหงาย

จุดยอด คือ $(0, 0)$ จุดโฟกัส คือ $(0, 1)$

สมการไคเรตริกซ์ คือ $y = -1$





ใบกิจกรรมที่ 2

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำและคำตอบลงในช่องว่างที่กำหนด

1. จุดโฟกัส $(0, 5)$ และจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$ จงหาสมการพาราโบลา และเขียนกราฟ

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

2. จุดโฟกัส $(0, -3)$ และไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $y = 3$ จงหาสมการพาราโบลา และเขียนกราฟ

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

3. จงหาสมการของพาราโบลาที่มีจุดโฟกัส $(0, 3)$ และจุดยอด $(0, 0)$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

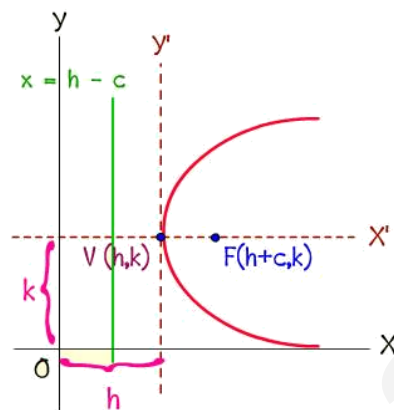
ใบความรู้ที่ 3

2. สมการพาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

2.1 เมื่อแกนสมมาตรขนานกับแกน x

สมการพาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) เมื่อแกนสมมาตรขนานกับแกน y ความสัมพันธ์ของกราฟ คือ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (y-k)^2 = 4c(x-h)\}$

เป็นพาราโบลาที่มีแกนในแนวนอน แกนสมมาตรอยู่บน เส้นตรง $y = k$



- จุดยอดอยู่ที่ $V(h, k)$
- จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h+c, k)$
- สมการไดเรกทริกซ์ คือ $y = k$
- เลตัสเรกตัมยาว $= |4c|$ หน่วย
- สมการรูปมาตรฐานเป็น $(y-k)^2 = 4c(x-h)$

หมายเหตุ ถ้า $c > 0$ โค้งเปิดไปทางขวา
ถ้า $c < 0$ โค้งเปิดไปทางซ้าย

ตัวอย่างที่ 3

จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไดเรกทริกซ์ และเขียนกราฟพาราโบลาจาก

สมการ $y^2 - 4y - 4x + 16 = 0$

วิธีทำ $y^2 - 4y - 4x + 16 = 0$

$$y^2 - 4y = 4x - 16$$

$$y^2 - 4y + 4 = 4x - 16 + 4$$

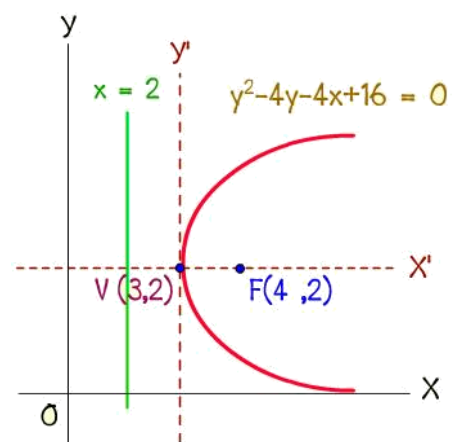
$$(y-2)^2 = 4(x-3)$$

$$(y-2)^2 = 4(1)(x-3)$$

จะได้ $c=1$ เป็นพาราโบลาด้านขวา

จุดยอด คือ $(3, 2)$ จุดโฟกัส คือ $(3+1, 2) = (4, 2)$

สมการไดเรกทริกซ์ คือ $x = 3 - 1 = 2$



ใบกิจกรรมที่ 3

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำและคำตอบลงในช่องว่างที่กำหนด

1. จุดยอดอยู่ที่ $(-2, 3)$ และจุดโฟกัสอยู่ที่ $(1, 3)$ จงหาสมการพาราโบลา และเขียนกราฟ
วิธีทำ

1. จุดยอดอยู่ที่ $(-2, 3)$ และจุดโฟกัสอยู่ที่ $(1, 3)$ จงหาสมการพาราโบลา และเขียนกราฟ
วิธีทำ



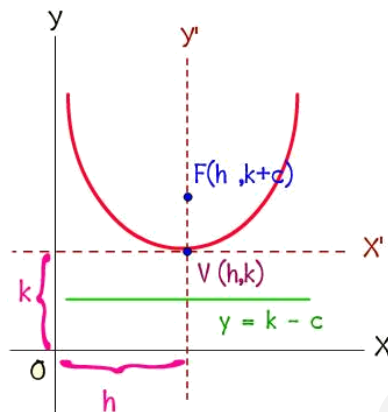
วิธีทำ

ใบความรู้ที่ 4

2.2 เมื่อแกนสมมาตรขนานกับแกน y

สมการพาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) เมื่อแกนสมมาตรขนานกับแกน y ความสัมพันธ์ของกราฟ คือ $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x-h)^2 = 4c(y-k)\}$

เป็นพาราโบลาที่มีแกนในแนวตั้ง แกนสมมาตรอยู่บน เส้นตรง $x = h$



- จุดยอดอยู่ที่ $V(h, k)$
 - จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h, k+c)$
 - สมการไคเรตริกซ์ คือ $y = k - c$
 - เลตัสเรกตัมยาว $= |4c|$ หน่วย
- สมการรูปรมาตรฐานเป็น $(y-k)^2 = 4c(x-h)$

หมายเหตุ ถ้า $c > 0$ โค้งเปิดไปทางด้านบน
 ถ้า $c < 0$ โค้งเปิดไปทางด้านล่าง

ตัวอย่างที่ 4

จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไคเรตริกซ์ และเขียนกราฟพาราโบลาจากสมการ $x^2 + 4x - 8y + 12 = 0$

วิธีทำ $x^2 + 4x - 8y + 12 = 0$ $x^2 + 4x - 8y + 12 = 0$

$$x^2 + 4x = 8y - 12$$

$$x^2 + 4x + 4 = 8y - 12 + 4$$

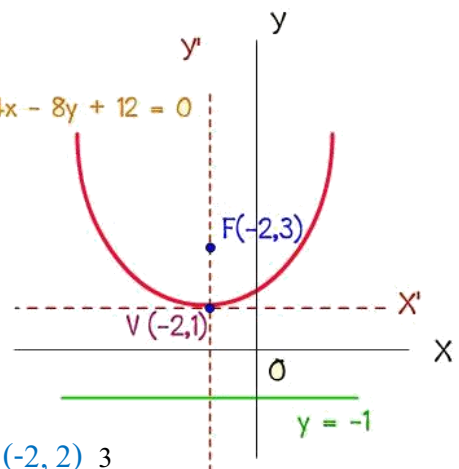
$$(x + 2)^2 = 8(y - 1)$$

$$(x + 2)^2 = 4(2)(y - 1)$$

จะได้ $c = 2$ เป็นพาราโบลาหงาย

จุดยอด คือ $(-2, 1)$ จุดโฟกัส คือ $(-2, 1+2) = (-2, 3)$

สมการไคเรตริกซ์ คือ $y = 1 - 2 = -1$



ใบกิจกรรมที่ 4

คำชี้แจง ให้นักเรียนแสดงวิธีทำและคำตอบลงในช่องว่างที่กำหนด

1. จุดยอดอยู่ที่ (2, 3) และไครเรกติกซ์ คือ เส้นตรง $y = 8$ จงหาสมการพาราโบลา และเขียนกราฟ

วิธีทำ

www.kroobannok.com



วิธีทำ

www.kroobannok.com



แบบฝึกหัดที่ 1.1

คำชี้แจง

- ให้นักเรียนเติมคำตอบลงในช่องว่างที่กำหนด

พาราโบลา

- $y^2 + 32x - 12y + 36 = 0$

จุดยอด = (,)

สมการไดเรกติกส์ $X =$

ความยาวของเลตส์เรกตัม =

จุดโฟกัส = (,)

- $y^2 + 20x - 18y + 201 = 0$

จุดยอด = (,)

สมการไดเรกติกส์ $X =$

ความยาวของเลตส์เรกตัม =

จุดโฟกัส = (,)

- $y^2 - 4x - 18y + 129 = 0$

จุดยอด = (,)

สมการไดเรกติกส์ $X =$

ความยาวของเลตส์เรกตัม =

จุดโฟกัส = (,)

4. $x^2 + 6x + 20y + 189 = 0$

จุดยอด = (,)

สมการไดเรกติกส์ $Y =$

ความยาวของเลตส์เรกตัม =

จุดโฟกัส = (,)

5. $x^2 + 18x - 28y + 109 = 0$

จุดยอด = (,)

สมการไดเรกติกส์ $Y =$

ความยาวของเลตส์เรกตัม =

จุดโฟกัส = (,)

3. $x^2 - 24x - 28y + 136 = 0$

จุดยอด = (,)

สมการไดเรกติกส์ $Y =$

ความยาวของเลตส์เรกตัม =

จุดโฟกัส = (,)



แบบทดสอบหลังเรียน
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 วงกลม

คำชี้แจง แบบทดสอบนี้เป็นแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดลงในกระดาษคำตอบ

1. พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ จุด $(-2, -6)$ และ โฟกัสอยู่ที่จุด $(-2, -2)$ สมการไคเรกตริกซ์ตรงกับข้อใด

- ก. $y = 10$
- ข. $x = 10$
- ค. $y = -10$
- ง. $x = -10$

2. พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ จุด $(2, 3)$ มีแกนพาราโบลาขนานแกน y ผ่านจุด $(4, 5)$ สมการพาราโบลา ตรงกับข้อใด

- ก. $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$
- ข. $x^2 - 4x + 12y - 10 = 0$
- ค. $x^2 + 4x - 2y - 10 = 0$
- ง. $x^2 - 2x - 4y + 10 = 0$



3. จากสมการ $y^2 - 12x = 0$ จุดยอด และจุดโฟกัส ของพาราโบลาตรงกับข้อใด

- ก. จุดยอด คือ $(0, 0)$ จุดโฟกัส คือ $(3, 0)$
- ข. จุดยอด คือ $(0, 0)$ จุดโฟกัส คือ $(-3, 0)$
- ค. จุดยอด คือ $(0, 0)$ จุดโฟกัส คือ $(0, 3)$
- ง. จุดยอด คือ $(0, 0)$ จุดโฟกัส คือ $(0, -3)$

4. จากสมการ $y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$ จุดยอด และจุดโฟกัส ของพาราโบลา ตรงกับข้อใด

- ก. จุดยอด คือ $(1,2)$ จุดโฟกัส คือ $(1,1)$
- ข. จุดยอด คือ $(2,1)$ จุดโฟกัส คือ $(1,1)$
- ค. จุดยอด คือ $(1,1)$ จุดโฟกัส คือ $(1,2)$
- ง. จุดยอด คือ $(1,1)$ จุดโฟกัส คือ $(2,1)$

5. จากสมการ $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$ จุดยอด และสมการไคเรกตริกซ์ ตรงกับข้อใด

- ก. จุดยอด คือ $(-3,2)$ สมการไคเรกตริกซ์ $x = -1$
- ข. จุดยอด คือ $(-3,-2)$ สมการไคเรกตริกซ์ $x = 1$
- ค. จุดยอด คือ $(3,-2)$ สมการไคเรกตริกซ์ $x = -1$
- ง. จุดยอด คือ $(3,2)$ สมการไคเรกตริกซ์ $x = 1$

6. ข้อใดคือสมการของพาราโบลาที่มี ไคเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $x = 12$ และโฟกัส อยู่ที่จุด $(2,0)$

- ก. $y^2 = 8x$
- ข. $x^2 = 2y$
- ค. $y^2 = -8x$
- ง. $x^2 = -12y$

7. ข้อใดคือสมการของพาราโบลาที่มี ไคเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $y = -3$ และโฟกัส อยู่ที่จุด $(0,3)$

- ก. $x^2 = -12y$
- ข. $y^2 = -8x$
- ค. $y^2 = -12x$
- ง. $x^2 = 12y$



8. ข้อใดคือสมการของพาราโบลาที่มี ไคเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $x = 4$ และโฟกัส อยู่ที่จุด $(-4, 0)$

ก. $y^2 = 16x$

ข. $y^2 = -16x$

ค. $x^2 = 16y$

ง. $x^2 = -16y$

9. ข้อใดคือสมการของพาราโบลาที่มี ไคเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $y = -4$ และโฟกัส อยู่ที่จุด $(2, -2)$

ก. $x^2 - 4x + 4y - 4 = 0$

ข. $x^2 + 4x + 4y + 8 = 0$

ค. $x^2 - 4x - 4y - 8 = 0$

ง. $x^2 + 4x - 4y + 4 = 0$

10. ข้อใดคือสมการของพาราโบลาที่มี ไคเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $x = 1$ และโฟกัส อยู่ที่จุด $(-5, 2)$

ก. $y^2 - 12y + 4x + 28 = 0$

ข. $y^2 - 4y + 4x + 28 = 0$

ค. $y^2 + 12y - 4x - 28 = 0$

ง. $y^2 + 4y - 12x + 28 = 0$



เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน



1. ตอบ ก
2. ตอบ ก
3. ตอบ ข
4. ตอบ ก
5. ตอบ ง
6. ตอบ ก
7. ตอบ ก
8. ตอบ ง
9. ตอบ ข
10. ตอบ ง



เฉลยใบกิจกรรมที่ 1

1. จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-5, 0)$ และจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$ จงหาสมการพาราโบลาและเขียนกราฟ

วิธีทำ แกนพาราโบลา คือ แกน $X (y = 0)$

$c = 5$ ซึ่งเป็นพาราโบลาเปิดทางขวา

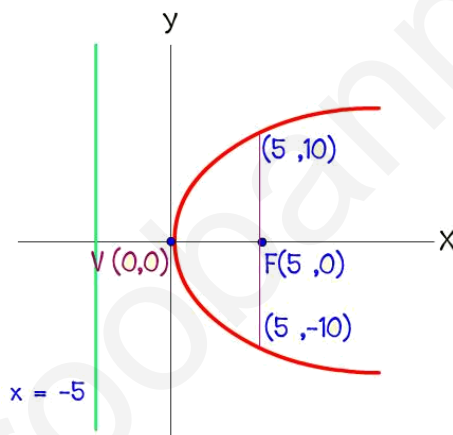
สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = 5$

เลตัสเรกตัมยาว $|4(5)| = 20$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $y^2 = 4cx$

จะได้สมการ $y^2 = 4(5)x$

$$y^2 = 20x$$



2. จุดโฟกัสอยู่ที่ $(-3, 0)$ และไดเรกตริกซ์ คือ $x = 3$ จงหาสมการพาราโบลาและเขียนกราฟ

วิธีทำ แกนพาราโบลา คือ แกน $X (y = 0)$

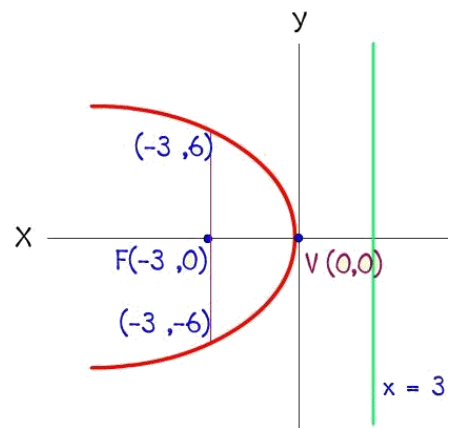
จุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$

เลตัสเรกตัมยาว $|4(-3)| = 12$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $y^2 = 4cx$

จะได้สมการ $y^2 = 4(-3)x$

$$y^2 = -12x$$



3. จงหาสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอด $(0, 0)$ มีแกน x เป็นแกนพาราโบลา ความยาวของลาตัสเรกตัมเท่ากับ 12 หน่วย

วิธีทำ จากเลตัสเรกตัม $= |4c|$

$$\text{จะได้ } 12 = |4c|$$

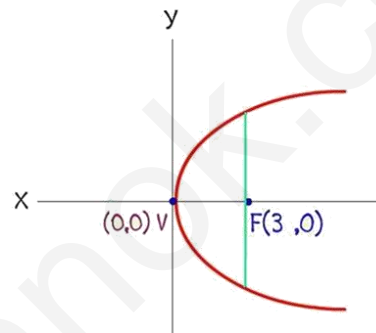
$$c = (+3), (-3)$$

จากสมการจะได้กราฟพาราโบลาสองอัน เป็นเปิดขวาและเปิดซ้ายอย่างละอัน

สมการพาราโบลาเปิดทางขวา คือ

$$y^2 = |4(3)|x$$

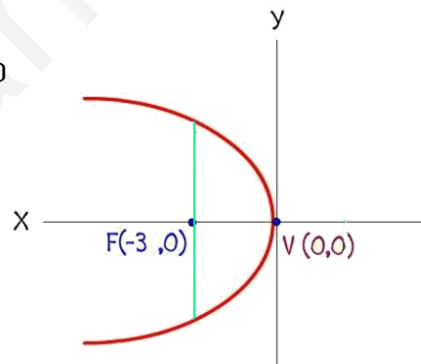
$$y^2 = 12x$$



สมการพาราโบลาเปิดทางซ้าย คือ

$$y^2 = |4(-3)|x$$

$$y^2 = -12x$$



เฉลยใบกิจกรรมที่ 2

1. จุดโฟกัส $(0, 5)$ และจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$ จงหาสมการพาราโบลา และเขียนกราฟ

วิธีทำ แกนพาราโบลา คือ แกน y ($x = 0$)

$c = 5$ ซึ่งเป็นพาราโบลาหงาย

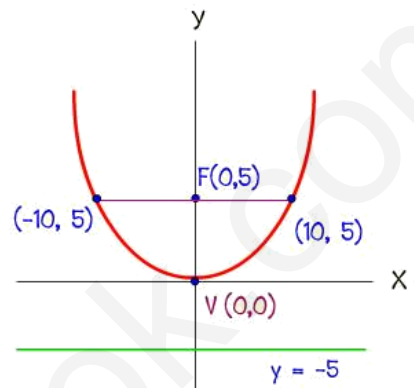
สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = -5$

เลตัสเรกตัมยาว $|4(5)| = 20$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $x^2 = 4cy$

จะได้ สมการ $x^2 = 4(5)y$

$$x^2 = 20y$$



2. จุดโฟกัส $(0, -3)$ และไดเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $y = 3$ จงหาสมการพาราโบลา และเขียนกราฟ

วิธีทำ แกนพาราโบลา คือ แกน y ($x = 0$)

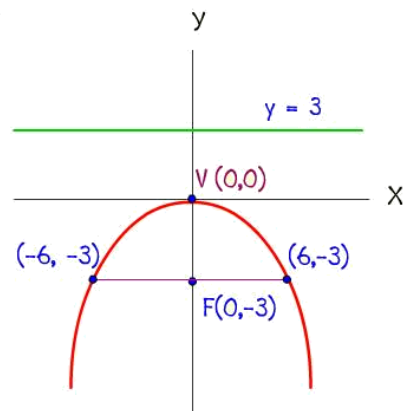
$c = -3$ ซึ่งเป็นพาราโบลาคว่ำ

เลตัสเรกตัมยาว $|4(-3)| = 12$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $x^2 = 4cy$

จะได้ สมการ $x^2 = 4(-3)y$

$$x^2 = -12y$$



3. จงหาสมการของพาราโบลาที่มีจุดโฟกัส $(0,3)$ และจุดยอด $(0,0)$

วิธีทำ แกนพาราโบลา คือ แกน y ($x = 0$)

$c = 3$ ซึ่งเป็นพาราโบลาหงาย

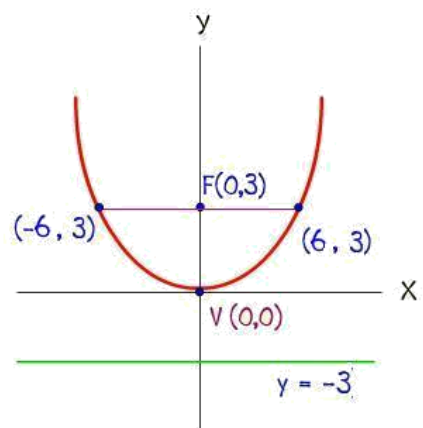
สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = -3$

เลตัสเรกตัมยาว $|4(3)| = 12$ หน่วย

สมการอยู่ในรูป $x^2 = 4cy$

จะได้ สมการ $x^2 = 4(3)y$

$$x^2 = 12y$$



เฉลยใบกิจกรรมที่ 3

1. จุดยอดอยู่ที่ $(-2, 3)$ และจุดโฟกัสอยู่ที่ $(1, 3)$ จงหาสมการพาราโบลา และเขียนกราฟ

วิธีทำ จุดยอดอยู่ที่ $V(-2, 3) = V(h, k)$ จะได้ $h = -2, k = 3$

จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(1, 3) = F(h+c, k)$ จะได้ $h+c = 1$

$$(-2)+c=1, c=1+2=3$$

เป็นพาราโบลาเปิดทางขวา

แกนพาราโบลานานกับ X คือ เส้นตรง $y=3$

สมการไดเรกตริกซ์ คือ $x = h - c = (-2) - 3 = -5$

เลตัสเรกตัมยาว $|4c| = |4(3)| = 12$ หน่วย

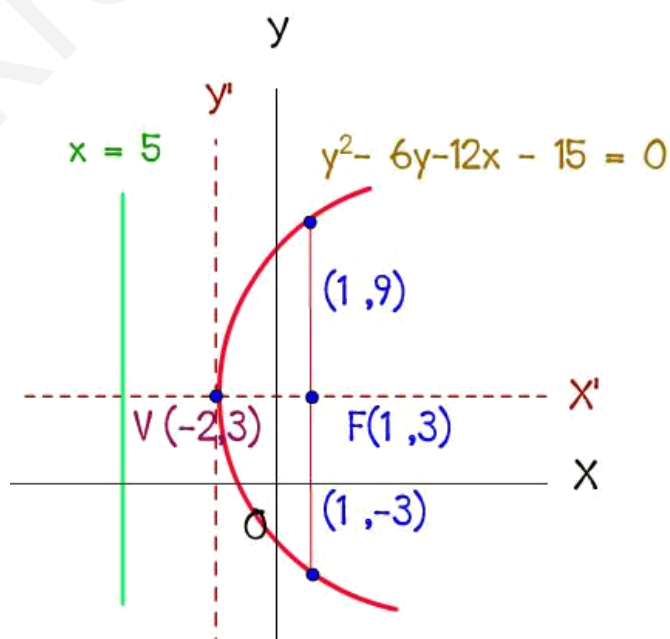
สมการอยู่ในรูป $(y-k)^2 = 4c(x-h)$

จะได้ $(y-3)^2 = 4(3)(x-(-2))$

$$(y-3)^2 = 12(x+2)$$

$$y^2 - 6y + 9 = 12x + 24$$

$$y^2 - 6y - 12x - 15 = 0$$



2. จุดยอดอยู่ที่ $(-3, -4)$ และไครเรติกซ์ คือ เส้นตรง $x = 2$ จงหาสมการพาราโบลา และเขียนกราฟ

วิธีทำ จุดยอดอยู่ที่ $V(-3, -4) = V(h, k)$ จะได้ $h = -3, k = -4$

ไครเรติกซ์ คือ เส้นตรง $x = 2$

จะได้ $h - c = 2, -3 - c = 2, c = -5$

แกนพาราโบลานานกับ X คือ เส้นตรง $y = -4$

เป็นพาราโบลาเปิดทางซ้าย

เลตส์เรกคัมยาว $|4c| = |4(-5)| = 20$ หน่วย

จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h+c, k) = F(-3+(-5), -4)$

$F(-8, -4)$

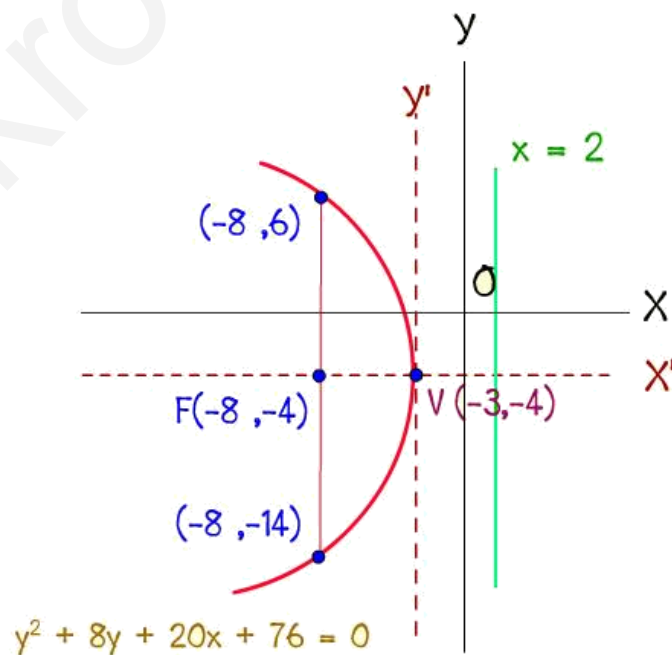
สมการอยู่ในรูป $(y-k)^2 = 4c(x-h)$

จะได้ $(y-(-4))^2 = 4(-5)(x-(-3))$

$$(y+4)^2 = -20(x+3)$$

$$y^2 + 8y + 16 = -20x - 60$$

$$y^2 + 8y + 20x + 76 = 0$$



เฉลยใบกิจกรรมที่ 4

1. จุดยอดอยู่ที่ $(2, 3)$ และไคเรกติกซ์ คือ เส้นตรง $y = 8$ จงหาสมการพาราโบลา และเขียนกราฟ

วิธีทำ

จุดยอดอยู่ที่ $V(2, 3) = V(h, k)$ จะได้ $h = 2, k = 3$

ไคเรกติกซ์ คือ เส้นตรง $y = 8$

จะได้ $k - c = 8, 3 - c = 8, c = -5$

เป็นพาราโบลาว่า

แกนพาราโบลานานกับ Y คือ เส้นตรง $x = 2$

เลตส์เรกตัมยาว $|4c| = |4(-5)| = 20$ หน่วย

จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h, k+c) = F(2, 3+(-5))$

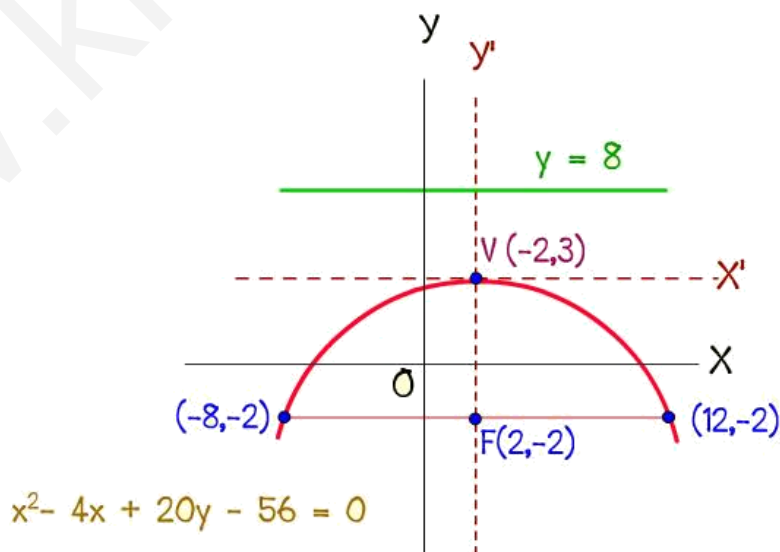
$F(2, -2)$

สมการอยู่ในรูป $(x-h)^2 = 4c(y-k)$

จะได้ $(x-2)^2 = 4(-5)(y-3)$

$$x^2 - 4x + 4 = -20y + 60$$

$$x^2 - 4x + 20y - 56 = 0$$



2. จงหาจุดยอด จุดโฟกัส ไคเรกติกซ์ แกนพาราโบลา ความยาวของเลตส์เรกตัม และ
เขียนกราฟ จากสมการพาราโบลา $x^2 + 4x - 16y + 52 = 0$

วิธีทำ จากสมการ $x^2 + 4x - 16y + 52 = 0$

จะได้ $x^2 + 4x = 16y - 52$

$$x^2 + 4x + 4 = 16y - 52 + 4$$

$$x^2 + 4x + 4 = 16y - 48$$

$$(x-2)^2 = 4(4)(y-3)$$

ดังนั้น จุดยอดอยู่ที่ $V(h, k) = V(-2, 3)$ จะได้ $h = -2, k = 3$

แกนพาราโบลานานกับ Y คือ เส้นตรง $x = -2$

$c = 4$ เป็นพาราโบลาหงาย

จุดโฟกัสอยู่ที่ $F(h, k+c) = F(-2, 3+4)$

$$F(-2, 7)$$

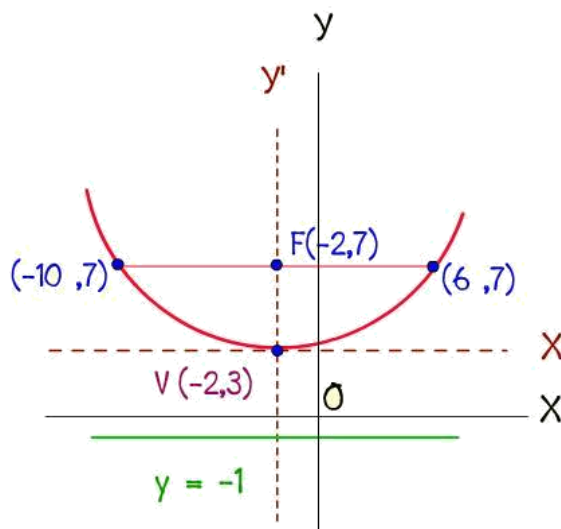
ไคเรกติกซ์ คือ เส้นตรง $y = -1$

เลตส์เรกตัมยาว $|4c| = |4(4)| = 16$ หน่วย

$$x^2 - 4x + 4 = -20y + 60$$

$$x^2 - 4x + 20y - 56 = 0$$

สมการอยู่ในรูป $(y-h)^2 = 4c(y-k)$



เฉลยแบบฝึกหัดที่ 1.1

1. $y^2 + 32x - 12y + 36 = 0$

จุดยอด = $(0, 6)$

สมการไดเรกติกส์ $X = 8$

ความยาวของเลตส์เรกตัม = 32

จุดโฟกัส = $(-8, 6)$

2. $y^2 + 20x - 18y + 201 = 0$

จุดยอด = $(-6, 9)$

สมการไดเรกติกส์ $X = -1$

ความยาวของเลตส์เรกตัม = 20

จุดโฟกัส = $(-11, 9)$

3. $y^2 - 4x - 18y + 129 = 0$

จุดยอด = $(12, 9)$

สมการไดเรกติกส์ $X = 11$

ความยาวของเลตส์เรกตัม = 4

จุดโฟกัส = $(13, 9)$

4. $x^2 + 6x + 20y + 189 = 0$

จุดยอด = $(-3, -9)$

สมการไดเรกติกส์ $Y = -4$

ความยาวของเลตส์เรกตัม = 20

จุดโฟกัส = $(-3, -14)$

5. $x^2 + 18x - 28y + 109 = 0$

จุดยอด = $(-9, 1)$

สมการไดเรกติกส์ $Y = -6$

ความยาวของเลตส์เรกตัม = 28

จุดโฟกัส = $(-9, 8)$

6. $x^2 - 24x - 28y + 136 = 0$

จุดยอด = $(12, -10)$

สมการไดเรกติกส์ $Y = -17$

ความยาวของเลตส์เรกตัม = 28

จุดโฟกัส = $(12, -3)$



เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

1. ตอบ ก
2. ตอบ ก
3. ตอบ ง
4. ตอบ ข
5. ตอบ ง
6. ตอบ ก
7. ตอบ ก
8. ตอบ ข
9. ตอบ ก
10. ตอบ ง



บรรณานุกรม

กมล เอกไทยเจริญ. (2555). คู่มือคณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 2 (สาระเพิ่มเติม).

กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิง.

กวีชา เนาวประทีป. (2556). เทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ภาคตัดกรวย.

กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

เจริญ ภูภัทรพงศ์ และศรีลัดดา ภูภัทรพงศ์. (2555). คู่มือและเทคนิคคิดลด

โจทย์ คณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 2 ค01,ค042 ..กรุงเทพฯ : Science Center.

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (2554). คณิตศาสตร์ เพิ่มเติม ม.4 ภาคเรียนที่2.

กรุงเทพฯ : พ.ศ. พัฒนา.

_____. (2556). คณิตศาสตร์ เพิ่มเติม ม.4-6 เล่ม 2. กรุงเทพฯ : พ.ศ. พัฒนา.