แบบฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์
เรื่อง ความน่าจะเป็น กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5
แบบฝึกทักษะที่ 8 เรื่อง ความน่าจะเป็น

นางสายธาร จีรดิษฐ

ตำแหน่ง ครู   วิทยฐานะ ครูชำนาญการ

โรงเรียนหนองฉางวิทยา

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 42

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน

กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

แบบฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนหนองฉางวิทยา ประกอบด้วย คำชี้แจงสำหรับการใช้งาน คำชี้แจงสำหรับครู คำชี้แจงสำหรับนักเรียน และแบบฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งนักเรียนควรศึกษาให้เข้าใจอย่างชัดเจน เพื่อจะสามารถทำกิจกรรมการเรียนรู้ได้อย่างมีประสิทธิภาพและบรรลุผลตามจุดประสงค์การเรียนรู้ แบบฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชุดนี้ คือ แบบฝึกทักษะที่ 8 เรื่อง ความน่าจะเป็น มีเนื้อหาสาระเกี่ยวกับความน่าจะเป็น โดยแบบฝึกทักษะนี้เป็นแบบฝึกทักษะที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ เน้นให้ผู้เรียนลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง รายละเอียดของการใช้แบบฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ได้เสนอไว้ในคู่มือเล่มนี้แล้ว หวังว่าผู้ใช้แบบฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ชุดนี้ คงได้รับประโยชน์ตามสมควร

ผู้จัดทำขอขอบพระคุณผู้อำนวยการ โรงเรียนบ้านหนองฉางวิทยา คณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน และคณะครูอาจารย์ทุกท่านที่ให้คำแนะนำ และคำปรึกษาที่ดี ตลอดจนการให้กำลังใจในการจัดทำแบบฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ แบบฝึกทักษะที่ 8 เรื่อง ความน่าจะเป็น จนประสบผลสำเร็จด้วยดี

สายธาร จีรดิษฐ

คำชี้แจง สำหรับการใช้งานแบบฝึกทักษะการพัฒนาการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น

แบบฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น ประกอบด้วยแบบฝึกทักษะทั้งหมด 9 หน่วย คือ

หน่วยที่ 1 เรื่อง แฟกทอเรียล
หน่วยที่ 2 เรื่อง กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ
หน่วยที่ 3 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น
หน่วยที่ 4 เรื่อง วิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม
หน่วยที่ 5 เรื่อง การจัดหมู่
หน่วยที่ 6 เรื่อง ทฤษฎีบททวินาม
หน่วยที่ 7 เรื่อง การทดลองสุ่ม ปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์
หน่วยที่ 8 เรื่อง ความน่าจะเป็น
หน่วยที่ 9 เรื่อง กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น

แบบฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น ทั้ง 9 หน่วย เป็นแบบฝึกทักษะที่เน้นให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติจริงในการฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ การปฏิบัติงานรวมกันเป็นกลุ่ม และทำให้นักเรียนเกิดทักษะกระบวนการในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์อย่างเป็นระบบ ตลอดจนสอดคล้องกับหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดยในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ จะใช้แบบฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น ทั้ง 9 หน่วย เพื่อให้นักเรียนศึกษาอย่างเป็นขั้นตอนในด้านการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ นักเรียนจะได้รับความรู้ ความเข้าใจ และมีทักษะในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ นอกจากนั้นยังได้รับความสนุกสนานเพลิดเพลินจากกระบวนการเรียนเป็นกลุ่ม นักเรียนสามารถนำความรู้และกระบวนการแก้โจทย์ปัญหาดังกล่าวที่ได้จากการทำกิจกรรมไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน และการศึกษาในศาสตร์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง

คำชี้แจงสำหรับนักเรียน

1. แบบฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 แบ่งออกเป็น 9 หน่วย แต่ละหน่วยจะแบ่งออกเป็นตอน ๆ เพื่อให้เกิดความสะดวกในการใช้แบบฝึกทักษะ แบบฝึกทักษะหน่วยที่ 8 เรื่อง ความน่าจะเป็น ชุดนี้ ใช้ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนหนองฉางวิทยา ซึ่งมีส่วนประกอบดังนี้

ชื่อตอน
จุดประสงค์การเรียนรู้
ใบความรู้ที่ 1
แบบฝึกทักษะที่ 1
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1
ใบความรู้ที่ 2
แบบฝึกทักษะที่ 2
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2
ใบความรู้ที่ 3
แบบฝึกทักษะที่ 3
เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3
สรุปเนื้อหาสาระสำคัญ
กิจกรรมชวนคิดพิชิตโจทย์
เฉลยกิจกรรมชวนคิดพิชิตโจทย์
แบบทดสอบหลังเรียน
เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

2. แบบฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น ฉบับนี้แบ่งออกเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

ตอนที่ 2 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ (ต่อ)

วิธีการศึกษา

ในการใช้แบบฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ เรื่อง ความน่าจะเป็น ในแต่ละหน่วย ให้นักเรียนทำความเข้าใจตามหัวข้อต่าง ๆ โดยมีขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ดังนี้

1. นักเรียนฟังคำชี้แจงการใช้แบบฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบฝึกทักษะหน่วยที่ 8 เรื่อง ความน่าจะเป็น
2. ให้นักเรียนรับแบบฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ แบบฝึกทักษะหน่วยที่ 8 เรื่อง ความน่าจะเป็น
3. ให้นักเรียนศึกษาจุดประสงค์การเรียนรู้
4. ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างจากใบความรู้ที่ 1
5. ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 1
6. ให้นักเรียนตรวจสอบผลการทำแบบฝึกทักษะที่ 1 จากเฉลยแบบฝึกทักษะ และบันทึกผล พร้อมทั้งแก้ไขข้อผิด
7. ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างจากใบความรู้ที่ 2
8. ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 2
9. ให้นักเรียนตรวจสอบผลการทำแบบฝึกทักษะที่ 2 จากเฉลยแบบฝึกทักษะ และบันทึกผล พร้อมทั้งแก้ไขข้อผิด
10. ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างจากใบความรู้ที่ 3
11. ให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 3

12. ให้นักเรียนตรวจสอบผลการทำแบบฝึกทักษะที่ 3 จากเฉลยแบบฝึกทักษะและบันทึกผล พร้อมทั้งแก้ไขข้อผิด

13. ให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายสรุปเนื้อหาลงในสรุปเนื้อหาสาระสำคัญ

14. ให้นักเรียนช่วยกันทำกิจกรรมชวนคิดพิชิตโจทย์

15. ให้นักเรียนตรวจสอบกับเฉลยกิจกรรมชวนคิดพิชิตโจทย์

16. เมื่อนักเรียนทุกคนทำแบบฝึกทักษะครบทุกแบบฝึกทักษะในหน่วยที่ 8 แล้วให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน ทำเป็นรายบุคคลด้วยความตั้งใจและซื่อสัตย์

17. ในการเข้าร่วมกิจกรรมทุกครั้งนักเรียนควรให้ความร่วมมือ ตั้งใจในการทำกิจกรรม และตรงต่อเวลาเสมอ

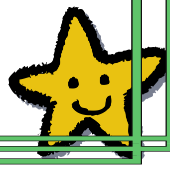
หน่วยที่ 8

เรื่อง ความน่าจะเป็น

ตอนที่ 1 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

เวลาเรียน 2 ชั่วโมง

จุดประสงค์การเรียนรู้
หน่วยที่ 8 ตอนที่ 1



1. ด้านความรู้

1) นักเรียนสามารถหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่กำหนดให้ได้

2. ด้านทักษะ/ กระบวนการ

1) นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาสิ่งที่เรียนรู้ได้
2) นักเรียนมีความสามารถในการนำเสนอสิ่งที่เรียนรู้ได้
3) นักเรียนมีความสามารถในการเชื่อมโยงสิ่งที่เรียนรู้ได้

3. ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ : นักเรียน

1) รักชาติ ศาสน์ กษัตริย์
2) ซื่อสัตย์ สุจริต
3) มีวินัย
4) ใฝ่เรียนรู้
5) อยู่อย่างพอเพียง
6) มุ่งมั่นในการทำงาน
7) รักความเป็นไทย
8) มีจิตสาธารณะ
9) กตัญญูกตเวที

ใบความรู้ที่ 1
หน่วยที่ 8 ตอนที่ 1

ความน่าจะเป็น

การหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ ก็คือหาว่าเหตุการณ์ดังกล่าวมีโอกาสเกิดขึ้นเท่าใด (หรือ หมายถึง เหตุการณ์ดังกล่าวมีโอกาสเกิดขึ้นกี่เปอร์เซ็นต์นั่นเอง)

ความน่าจะเป็น (Probability) ของเหตุการณ์ E คือ ตัวเลขที่บอกให้รู้ว่าเหตุการณ์ E มีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด แทนด้วยสัญลักษณ์ P (E)

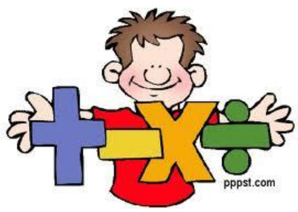
$$\text{ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E} = \frac{\text{จำนวนสมาชิกในเหตุการณ์ E}}{\text{จำนวนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง}}$$

(เมื่อสมาชิกแต่ละตัวมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน)

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

สมบัติที่สำคัญของความน่าจะเป็น

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. $P(\emptyset) = 0$
4. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \leq P(B)$



<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ในการหยิบไพ่ 1 ใบ จากไพ่ 1 สำรับ ซึ่งมี 52 ใบ จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้ไพ่ใบนั้นเป็นโพดำ

วิธีทำ สมมุติให้ E แทน เหตุการณ์ที่ได้ไพ่ใบนั้นเป็นโพดำ

และ S แทน แซมเปิลสเปซ

จะได้ $n(E) = 13$

และ $n(S) = 52$

จากสูตร $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

แสดงว่า $P(E) = \frac{13}{52}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้ไพ่ใบนั้นเป็นโพดำเท่ากับ $\frac{13}{52}$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ในการโยนเหรียญหนึ่งอันสองครั้ง ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ขึ้น หัว (Head) หนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของ E

วิธีทำ สมมุติให้ H แทน หัว (Head)

T แทน ก้อย (Tail)

และ S แทน แซมเปิลสเปซ

จากโจทย์ $S = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$

จะได้ $n(S) = 4$

และ $E = \{(H,T),(T,H)\}$

จะได้ $n(E) = 2$

จากสูตร $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

$= \frac{2}{4}$

จะได้ $P(E) = \frac{1}{2}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ขึ้นหัว (Head) หนึ่งครั้ง เท่ากับ $\frac{1}{2}$

ตัวอย่าง 3 ในการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรงลูกเดียวหนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้แต้ม 5

วิธีทำ สมมุติให้ E แทน เหตุการณ์ที่ได้แต้ม 5

และ S แทน แซมเปิลสเปซ

จากโจทย์ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

จะได้ $n(S) = 6$

และ $E = \{5\}$

จะได้ $n(E) = 1$

จากสูตร $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

แสดงว่า $P(E) = \frac{1}{6}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้แต้ม 5 เท่ากับ $\frac{1}{6}$

ตัวอย่างที่ 4 จากเลขโดด 1, 3, 0 นำมาสร้างจำนวนที่มี 2 หลัก โดยใช้เลขไม่ซ้ำกัน จงหาความน่าจะเป็นจะได้เลขเป็นจำนวนคู่

วิธีทำ $S = \{13,\ 10,\ 31,\ 30\}$

จะได้ $n(S) = 4$

ถ้า E แทนเหตุการณ์ที่จะให้เลขจำนวนคู่

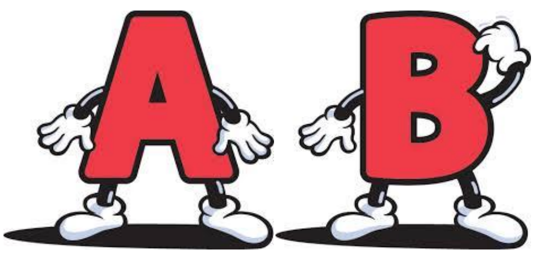
จะได้ $n(E) = \{10,\ 30\}$

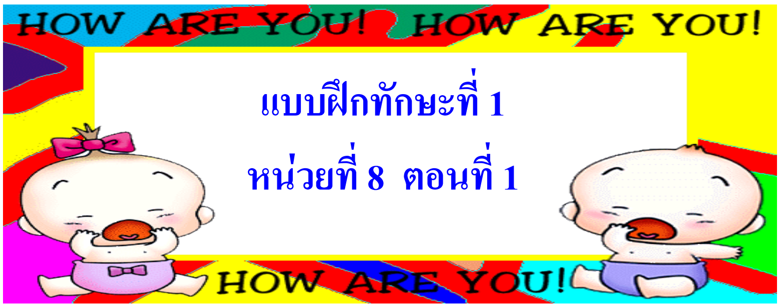
จะได้ $n(E) = 2$

ดังนั้น $P(E) = \frac{n(E)}{n(s)}$

$= \frac{2}{4}$

$= \frac{1}{2}$





คำชี้แจง จงหาความน่าจะเป็นในแต่ละข้อต่อไปนี้ (15 คะแนน)

1. ในการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรงลูกเดียวหนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นจำนวนคี่

วิธีทำ สมมุติให้ E แทน เหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นจำนวนคี่

และ S แทน แซมเปิลสเปซ

จากโจทย์ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

จะได้ $n(S) =$ ....

และ $E =$ ....

จะได้ $n(E) =$ ....

จากสูตร $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

แสดงว่า $P(E) =$ ....

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้แต้ม 5 เท่ากับ ....

2. ในการโยนเหรียญบาทเที่ยงตรง 1 อัน 2 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญทั้งสองขึ้นหน้าเหมือนกัน

วิธีทำ สมมุติให้ H แทน หัว (Head)

T แทน ก้อย (Tail)

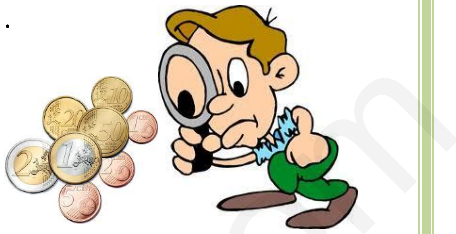
และ S แทน แซมเปิลสเปซ

จากโจทย์ $S =$ ....

จะได้ $n(S) =$ ....

และ $E = ...$

จะได้ $n(E) = ...$



จากสูตร $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

$= ....$

จะได้ $P(E) = ...$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เหรียญทั้งสองขึ้นหน้าเหมือนกัน เท่ากับ ....

3. จงหาความน่าจะเป็นของการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง เพื่อให้ได้แต้มจากการทอดลูกเต๋าแต่ละครั้งเป็นเลขคู่

วิธีทำ จากการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง

จะได้ $S = ...$

$\therefore$ $n(S) = ...$

เหตุการณ์ที่ต้องการ คือ ให้ขึ้นแต้มเป็นเลขคู่

จะได้ $E = ...$

$\therefore$ $n(E) = ...$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง เพื่อให้ได้แต้มคู่

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

$= ....$

$= ....$

4. ในการหยิบไพ่ 1 ใบ จากไพ่ 1 สำรับ ซึ่งมี 52 ใบ จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้ไพ่ใบนั้นเป็นแต้ม J

วิธีทำ สมมุติให้ E แทน เหตุการณ์ที่ได้ไพ่ใบนั้นเป็นแต้ม J

และ S แทน แซมเปิลสเปซ

จะได้ $n(E) = ...$

และ $n(S) = ...$

จากสูตร $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

แสดงว่า $P(E)$ = …………………..

= …………………..

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้ไพ่ใบนั้นเป็นแต้ม J เท่ากับ ………….

5. มีตัวอักษร 3 ตัว คือ P , A , T นำมาสลับที่กันทั้ง 3 ตัว เพื่อให้เกิดคำใหม่ อาจจะมีหรือไม่มีความหมายก็ได้ จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่จะได้ P เป็นอักษรตัวแรกของคำ

วิธีทำ S = { PAT , PTA , TAP , TPA , ATP , APT }

จะได้ n(S) = ……………………………………….

ถ้า E แทนเหตุการณ์ที่จะได้ P เป็นอักษรตัวแรกของคำ

จะได้ E = {PAT, PTA}

นั่นคือ n(E) = ………………….

ดังนั้น $P(E) = \frac{n(E)}{n(s)}$

= …………………….

= …………………….

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1
หน่วยที่ 8 ตอนที่ 1

คำชี้แจง จงหาความน่าจะเป็นในแต่ละข้อต่อไปนี้ (15 คะแนน)

1. ในการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรงลูกเดียวหนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นจำนวนคี่

วิธีทำ สมมุติให้ E แทน เหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นจำนวนคี่

และ S แทน แซมเปิลสเปซ

จากโจทย์ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

จะได้ $n(S) = 6$

และ $E = \{1, 3, 5\}$

จะได้ $n(E) = 3$

จากสูตร $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$

แสดงว่า $P(E) = \dfrac{3}{6}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้แต้ม 5 เท่ากับ $\dfrac{1}{2}$

2. ในการโยนเหรียญบาทเที่ยงตรง 1 อัน 2 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญทั้งสองขึ้นหน้าเหมือนกัน

วิธีทำ สมมุติให้ H แทน หัว (Head)

T แทน ก้อย (Tail)

และ S แทน แซมเปิลสเปซ

จากโจทย์ $S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

จะได้ $n(S) = 4$

และ $E = \{(H,H),(T,T)\}$

จะได้ $n(E) = 2$

จากสูตร $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$

$= \dfrac{2}{4}$

จะได้ $P(E) = \dfrac{1}{2}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เหรียญทั้งสองขึ้นหน้าเหมือนกัน เท่ากับ $\dfrac{1}{2}$

3. จงหาความน่าจะเป็นของการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง เพื่อให้ได้แต้มจากการทอดลูกเต๋าแต่ละครั้งเป็นเลขคู่

วิธีทำ จากการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง

จะได้ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\therefore n(S) = 6$

เหตุการณ์ที่ต้องการ คือ ให้ขึ้นแต้มเป็นเลขคู่

จะได้ $E = \{2,4,6\}$

$\therefore n(E) = 3$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง เพื่อให้ได้แต้มคู่

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

4. ในการหยิบไพ่ 1 ใบ จากไพ่ 1 สำรับ ซึ่งมี 52 ใบ จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้ไพ่ใบนั้นเป็นแต้ม J

วิธีทำ สมมุติให้ E แทน เหตุการณ์ที่ได้ไพ่ใบนั้นเป็นแต้ม J

และ S แทน แซมเปิลสเปซ

จะได้ $n(E) = 4$

และ $n(S) = 52$

จากสูตร $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$

แสดงว่า $P(E) = \dfrac{4}{52}$

$= \dfrac{1}{13}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้ไพ่ใบนั้นเป็นแต้ม J เท่ากับ $\dfrac{1}{13}$

5. มีตัวอักษร 3 ตัว คือ P , A , T นำมาสลับที่กันทั้ง 3 ตัว เพื่อให้เกิดคำใหม่ อาจจะมีหรือไม่มีความหมายก็ได้ จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่จะได้ P เป็นอักษรตัวแรกของคำ

วิธีทำ $S = \{PAT, PTA, TAP, TPA, ATP, APT\}$

จะได้ $n(S) = 6$

ถ้า E แทนเหตุการณ์ที่จะได้ P เป็นอักษรตัวแรกของคำ

จะได้ $E = \{PAT, PTA\}$

นั่นคือ $n(E) = 2$

ดังนั้น $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(s)}$

$= \dfrac{2}{6}$

$= \dfrac{1}{3}$

ใบความรู้ที่ 2
หน่วยที่ 8 ตอนที่ 1

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

ถ้า S แทน แซมเปิลสเปซ โดยที่สมาชิกแต่ละตัวใน S มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน E แทน เหตุการณ์ใด ๆ และ P(E) แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E แล้ว

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

หมายเหตุ n(E) *คือ จำนวนสมาชิกในเหตุการณ์* E

n(S) *คือ จำนวนสมาชิกในแซมเปิลสเปซ* S

คุณสมบัติของความน่าจะเป็น

ถ้า S คือ แซมเปิลสเปซ และ E คือ เหตุการณ์ใด แล้วจะได้

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. P(E) = 0 ก็ต่อเมื่อ E = Ø นั่นคือ P(Ø) = 0
3. P(S) = 1
4. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ เมื่อ $A \subset B$ แล้วจะได้ $P(A) \leq P(B)$

อธิบายเพิ่มเติม

1. ความน่าจะเป็นเป็นตัวเลขที่ไม่มีหน่วย โดยมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1

ถ้า P(E) = 0 แสดงว่า เหตุการณ์นั้น ไม่มี โอกาสเกิดขึ้นได้เลย

ถ้า P(E) = 1 แสดงว่า เหตุการณ์นั้นมีโอกาสเกิดขึ้นได้ 100%

2. จาก $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$

ดังนั้น $P(\phi) = \dfrac{n(\phi)}{n(S)} = \dfrac{0}{n(S)} = 0$

3. $P(S) = \dfrac{n(S)}{n(S)} = 1$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้าสุ่มครอบครัวที่มีบุตรสองคนมาครอบครัวหนึ่ง แล้วจงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ครอบครัวนั้น

1) มีบุตรคนแรกเป็นหญิง บุตรคนที่สองเป็นชาย
2) ไม่มีบุตรชายเลย
3) มีบุตรชายมากกว่า 1 คน
4) มีบุตรเป็นหญิงอย่างน้อย 1 คน
5) มีบุตรชาย 1 คน บุตรหญิง 1 คน

วิธีทำ สมมุติให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่มีบุตรคนแรกเป็นหญิง บุตรคนที่สองเป็นชาย

E_2 แทนเหตุการณ์ที่ไม่มีบุตรชายเลย

E_3 แทนเหตุการณ์ที่มีบุตรเป็นชายมากกว่า 1 คน

E_4 แทนเหตุการณ์ที่มีบุตรเป็นหญิงอย่างน้อย 1 คน

E_5 แทนเหตุการณ์ที่มีบุตรชาย 1 คน บุตรหญิง 1 คน

E_6 แทนเหตุการณ์ที่มีมีบุตรชาย 3 คน

จากโจทย์ $S = \{(ช, ช), (ช, ญ), (ญ, ช), (ญ, ญ)\}$

แสดงว่า $n(S) = 4$

1) พบว่า $E_1 = \{(ญ, ช)\}$

แสดงว่า $n(E_1) = 1$

จากสูตร $P(E_1) = \dfrac{n(E_1)}{n(s)}$

จะได้ $P(E_1) = \dfrac{1}{4}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่มีบุตรคนแรกเป็นหญิง บุตรคนที่สองเป็นชายเท่ากับ $\frac{1}{4}$

2) พบว่า $E_2 = \{(ญ, ญ)\}$

แสดงว่า $n(E_2) = 1$

จากสูตร $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(s)}$

จะได้ $P(E_2) = \frac{1}{4}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ไม่มีบุตรชายเลยท่ากับ $\frac{1}{4}$

3) พบว่า $E_3 = \{(ช, ช)\}$

แสดงว่า $n(E_3) = 1$

จากสูตร $P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(s)}$

จะได้ $P(E_3) = \frac{1}{4}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่มีบุตรเป็นชายมากกว่า 1 คนท่ากับ $\frac{1}{4}$

4) พบว่า $E_4 = \{(ช, ญ), (ญ, ช), (ญ, ญ)\}$

แสดงว่า $n(E_4) = 3$

จากสูตร $P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(s)}$

จะได้ $P(E_4) = \frac{3}{4}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่มีบุตรหญิงอย่างน้อย 1 คน เท่ากับ $\frac{3}{4}$

5) พบว่า $E_5 = \{(ช, ญ), (ญ, ช)\}$

แสดงว่า $n(E_5) = 2$

จากสูตร $P(E_5) = \frac{n(E_5)}{n(s)}$

จะได้ $P(E_5) = \frac{2}{4}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่มีบุตรชาย 1 คน บุตรหญิง 1 คน เท่ากับ $\frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 2 ในการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรงสองลูกหนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่

1) ลูกเต๋าจะได้แต้มเหมือนกัน
2) ลูกหนึ่งได้แต้ม 2 และอีกลูกหนึ่งได้แต้ม 5
3) ผลบวกของแต้มเท่ากับ 5
4) ผลบวกของแต้มมากกว่าหรือเท่ากับ 10
5) ผลบวกของแต้มหารด้วย 3 ลงตัว

วิธีทำ สมมุติให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าจะได้แต้มเหมือนกัน

E_2 แทนเหตุการณ์ที่ลูกหนึ่งได้แต้ม 2 และอีกลูกหนึ่งได้แต้ม 5

E_3 แทนเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มเท่ากับ 5

E_4 แทนเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มมากกว่าหรือเท่ากับ 10

E_5 แทนเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มหารด้วย 3 ลงตัว

และ S แทนแซมเปิลสเปซ

จากโจทย์จะได้ S = {(1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (1,6)
(2,1) , (2,2) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (2,6)
(3,1) , (3,2) , (3,3) , (3,4) ,(3,5) , (3,6)
(4,1) , (4,2) , (4,3) , (4,4) , (4,5) , (4,6)
(5,1) , (5,2) , (5,3) , (5,4) , (5,5) , (5,6)
(6,1) , (6,2) , (6,3) , (6,4) , (6,5) , (6,6)}

แสดงว่า $n(S) = 36$

1. พบว่า E_1 = {(1,1) , (2,2) , (3,3) , (4,4) , (5,5) , (6,6)}

แสดงว่า $n(E_1) = 6$

จากสูตร $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(s)}$

$= \frac{6}{36}$

จะได้ $P(E_1) = \frac{1}{6}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าจะได้แต้มเหมือนกัน คือ $\frac{1}{6}$

2. พบว่า $E_2 = \{(2,5),(5,2)\}$

แสดงว่า $n(E_2) = 2$

จากสูตร $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(s)}$

$= \frac{2}{36}$

จะได้ $P(E_2) = \frac{1}{18}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าลูกหนึ่งได้แต้ม 2 และอีกลูกหนึ่งได้แต้ม 5 คือ $\frac{1}{18}$

3. พบว่า $E_3 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

แสดงว่า $n(E_3) = 4$

จากสูตร $P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(s)}$

$= \frac{4}{36}$

จะได้ $P(E_3) = \frac{1}{9}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มเท่ากับ 5 คือ $\frac{1}{9}$

4. พบว่า $E_4 = \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

แสดงว่า $n(E_4) = 6$

จากสูตร $P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(s)}$

$= \frac{6}{36}$

จะได้ $P(E_4) = \frac{1}{6}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มมากกว่าหรือเท่ากับ 10 คือ $\frac{1}{6}$

5. พบว่า $E_5 = \{(1,2), (2,1), (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3), (3,6), (6,3), (4,5), (5,4), (6,6)\}$

แสดงว่า $n(E_5) = 12$

จากสูตร $P(E_5) = \frac{n(E_5)}{n(s)}$

$= \frac{12}{36}$

จะได้ $P(E_5) = \frac{1}{3}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มหารด้วย 3 ลงตัว คือ $\frac{1}{3}$

3. ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญและทอดลูกเต๋า 1 ลูก พร้อม ๆ กัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 6 และเหรียญขึ้นหัว

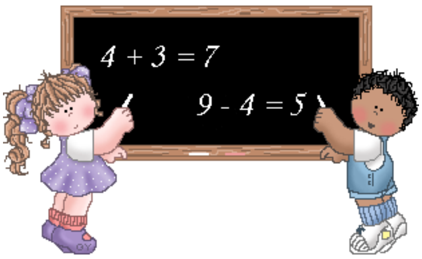
วิธีทำ S = {(H,1) , (H,2) ,(H,3) , (H,4) , (H,5) , (H,6) , (T,1) , (T,2) , (T,3) , (T,4) , (T,5) , (T,6) }

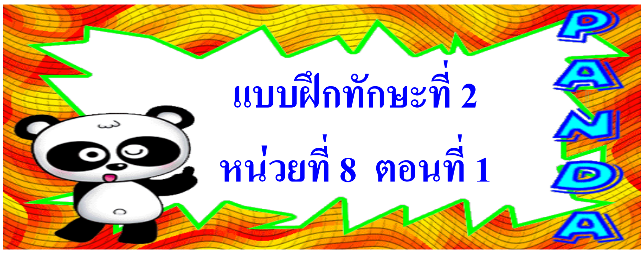
$n(S) = 12$

E = {(H,6)}

$P(E) = \frac{1}{12}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 6 และเหรียญขึ้นหัว คือ $\frac{1}{12}$





คำชี้แจง จงหาความน่าจะเป็นในแต่ละข้อต่อไปนี้ (15 คะแนน)

1. กล่องใบหนึ่งมีลูกปิงปองสีขาว 3 ลูก สีแดง 7 ลูก สีเขียว 4 ลูก สุ่มหยิบลูกปิงปองจากกล่อง 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่จะได้

1) สีขาว

2) สีแดง

3) สีเขียว

4) สีขาวหรือสีแดง

5) สีเขียวหรือสีแดง

วิธีทำ สมมุติให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกปิงปองสีขาว

E_2 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกปิงปองสีแดง

E_3 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกปิงปองสีเขียว

E_4 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกปิงปองสีขาวหรือสีแดง

E_5 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกปิงปองสีเขียวหรือสีแดง

เนื่องจาก มีลูกปิงปองสีขาว 3 ลูก สีแดง 7 ลูก สีเขียว 4 ลูก

แสดงว่า $n(S)$ = ...

1) เนื่องจาก หยิบได้สีขาวจะได้ 3 วิธี

แสดงว่า $n(E_1)$ = ...

จากสูตร $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(s)}$

จะได้ $P(E_1)$ = ...

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกปิงปองสีขาว เท่ากับ ....

2) เนื่องจาก หยิบได้สีแดง ทำได้ 7 วิธี

แสดงว่า $n(E_2)$ = ...

จากสูตร $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(s)}$

จะได้ $P(E_2) =$ …………………………..

$=$ …………………………...

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกปิงปองสีแดง เท่ากับ …………….

3) เนื่องจาก หยิบได้สีเขียว ทำได้ 4 วิธี

แสดงว่า $n(E_3) =$ ……………………………

จากสูตร $P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(s)}$

จะได้ $P(E_3) =$ ……………………………

$=$ ……………………………

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกปิงปองสีเขียว เท่ากับ ……………..

4) เนื่องจาก หยิบได้สีขาวหรือสีแดง ทำได้ ………… วิธี

แสดงว่า $n(E_4) =$ ……………………………

จากสูตร $P(E_4) =$ ……………………………

จะได้ $P(E_4) =$ ……………………………

$=$ ……………………………

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกปิงปองสีขาวหรือสีแดง เท่ากับ …………..

5) เนื่องจาก หยิบได้สีเขียวหรือสีแดง ทำได้ ………… วิธี

แสดงว่า $n(E_5) =$ ……………………………

จากสูตร $P(E_5) =$ ……………………………

จะได้ $P(E_5) =$ ……………………………

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกปิงปองสีเขียวหรือสีแดง เท่ากับ …………..

2. ไพ่สำรับหนึ่งมี 52 ใบ แบ่งเป็น 4 ชุด ชุดละ 13 ใบ ดังนี้ ชุดโพดำ ชุดโพแดง ชุดดอกจิก ชุดข้าวหลามตัด จงหาความน่าจะเป็นที่สุ่มหยิบไพ่ขึ้นมา 1 ใบแล้วได้

1) 10 โพแดง

2) ดอกจิก

3) แต้ม 5

4) โพดำ หรือข้าวหลามตัด

วิธีทำ สมมุติให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่แต้ม 10 โพแดง

E_2 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่แต้ม ดอกจิก

E_3 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่แต้ม 5

E_4 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่โพดำ หรือข้าวหลามตัด

$n(S)$ = ...

1) $P(E_1)$ = ...

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มหยิบไพ่ขึ้นมาแล้วได้ 10 โพแดง คือ ....

2) $P(E_2)$ = ...

= ....

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มหยิบไพ่ขึ้นมาแล้วได้ ดอกจิก คือ ....

3) $P(E_3)$ = ...

= ....

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มหยิบไพ่ขึ้นมาแล้วได้ ไพ่ แต้ม 5 คือ ....

4) $P(E_4)$ = ...

= ....

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มหยิบไพ่ขึ้นมาแล้วได้ ไพ่ โพดำหรือข้าวหลามตัด คือ ....

3.ในการโยนเหรียญ 3 เหรียญ 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้เหตุการณ์ต่อไปนี้

1) ขึ้นหัว 2 เหรียญ

2) ขึ้นก้อย อย่างน้อย 2 เหรียญ

3) ขึ้นก้อยทั้ง 3 เหรียญ

4) ขึ้นหัวเหรียญที่ 1 และขึ้นก้อยเหรียญที่ 3

5) ขึ้นหัว 1 เหรียญ

วิธีทำ

S = ……………………………………………………………………………..

n(S) = ……………………………………………………………………………..

1) ขึ้นหัว 2 เหรียญ

E = …………………………………………………………....

n(E) = …………………………………………………………....

P(E) = …………………………………………………………....

2) ขึ้นก้อย อย่างน้อย 2 เหรียญ

E = …………………………………………………………....

n(E) = …………………………………………………………....

P(E) = …………………………………………………………....

= …………………………………………………………....

3) ขึ้นก้อยทั้ง 3 เหรียญ

E = …………………………………………………………....

n(E) = …………………………………………………………....

P(E) = …………………………………………………………....

4) ขึ้นหัวเหรียญที่ 1 และขึ้นก้อยเหรียญที่ 3

E = …………………………………………………………....

n(E) = …………………………………………………………....

P(E) = ……………………………………………………...

= ……………………………………………………...

5) ขึ้นหัว 1 เหรียญ

E = ……………………………………………………...

n(E) = ……………………………………………………...

P(E) = ……………………………………………………...

4. ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้เหตุการณ์ต่อไปนี้

1) ได้ผลรวมของแต้ม เป็นจำนวนเฉพาะ

2) ได้ผลรวมของแต้ม เป็น 13

3) ได้ผลรวมของแต้ม ไม่เกิน 10

วิธีทำ S = ……………………………………………………...

……………………………………………………...

……………………………………………………...

n(S) = ……………………………………………………...

1) ได้ผลรวมของแต้ม เป็นจำนวนเฉพาะ

E = ……………………………………………………...

……………………………………………………...

n(E) = ……………………………………………………...

P(E) = ……………………………………………………...

2) ได้ผลรวมของแต้ม เป็น 13

E = ……………………………………………………

n(E) = ……………………………………………………

P(E) = ……………………………………………………

3) ได้ผลรวมของแต้ม ไม่เกิน 10

E = …………………………………………..

n(E) = ………………………………………………………...

P(E) = ………………………………………………………...

= ………………………………………………………...

5. มีลูกปิงปอง 4 ลูก แต่ละลูกมีหมายเลข 0,1,2,3 กำกับอยู่ลูกละหมายเลข ถ้าสุ่มหยิบลูกปิงปองขึ้นมา 2 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้หมายเลขบนลูกปิงปองรวมกันน้อยกว่า 4 เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ S = ………………………………………………………...

n(S) = ………………………………………………………...

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ได้หมายเลขรวมกันน้อยกว่า 4

E = ………………………………………………………...

n(E) = ………………………………………………………...

ดังนั้น P(E) = ………………………………………………………...

= ………………………………………………………...

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้หมายเลขรวมกันน้อยกว่า 4 เป็น …………

คำชี้แจง จงหาความน่าจะเป็นในแต่ละข้อต่อไปนี้ (15 คะแนน)

1. กล่องใบหนึ่งมีลูกปิงปองสีขาว 3 ลูก สีแดง 7 ลูก สีเขียว 4 ลูก สุ่มหยิบลูกปิงปองจากกล่อง 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่จะได้

1) สีขาว

2) สีแดง

3) สีเขียว

4) สีขาวหรือสีแดง

5) สีเขียวหรือสีแดง

วิธีทำ สมมุติให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกปิงปองสีขาว

E_2 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกปิงปองสีแดง

E_3 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกปิงปองสีเขียว

E_4 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกปิงปองสีขาวหรือสีแดง

E_5 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกปิงปองสีเขียวหรือสีแดง

เนื่องจาก มีลูกปิงปองสีขาว 3 ลูก สีแดง 7 ลูก สีเขียว 4 ลูก

แสดงว่า $n(S) = 14$

1) เนื่องจาก หยิบได้สีขาวทำได้ 3 วิธี

แสดงว่า $n(E_1) = 3$

จากสูตร $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(s)}$

จะได้ $P(E_1) = \frac{3}{14}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกปิงปองสีขาว เท่ากับ $\frac{3}{14}$

2) เนื่องจาก หยิบได้สีแดง ทำได้ 7 วิธี

แสดงว่า $n(E_2) = 7$

จากสูตร $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(s)}$

จะได้ $P(E_2) = \frac{7}{14}$

$= \frac{1}{2}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกปิงปองสีแดง เท่ากับ $\frac{1}{2}$

3) เนื่องจาก หยิบได้สีเขียว ทำได้ 4 วิธี

แสดงว่า $n(E_3) = 4$

จากสูตร $P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(s)}$

จะได้ $P(E_3) = \frac{4}{14}$

$= \frac{2}{7}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกปิงปองสีเขียว เท่ากับ $\frac{2}{7}$

4) เนื่องจาก หยิบได้สีขาวหรือสีแดง ทำได้ 10 วิธี

แสดงว่า $n(E_4) = 10$

จากสูตร $P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(s)}$

จะได้ $P(E_4) = \frac{10}{14}$

$= \frac{5}{7}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกปิงปองสีขาวหรือสีแดง เท่ากับ $\frac{5}{7}$

5) เนื่องจาก หยิบได้สีเขียวหรือสีแดง ทำได้ 11 วิธี

แสดงว่า $n(E_5) = 11$

จากสูตร $P(E_5) = \frac{n(E_5)}{n(s)}$

จะได้ $P(E_5) = \frac{11}{14}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกปิงปองสีเขียวหรือสีแดง เท่ากับ $\frac{11}{14}$

2. ไพ่สำรับหนึ่งมี 52 ใบ แบ่งเป็น 4 ชุด ชุดละ 13 ใบ ดังนี้ ชุดโพดำ ชุดโพแดง ชุดดอกจิก ชุดข้าวหลามตัด จงหาความน่าจะเป็นที่สุ่มหยิบไพ่ขึ้นมา 1 ใบแล้วได้

1) 10 โพแดง

2) ดอกจิก

3) เลข 5

4) โพดำ หรือข้าวหลามตัด

วิธีทำ สมมุติให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่แต้ม 10 โพแดง

E_2 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่แต้ม ดอกจิก

E_3 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่แต้ม 5

E_4 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่โพดำ หรือข้าวหลามตัด

$n(S) = 52$

1) $P(E_1) = \frac{1}{52}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มหยิบไพ่ขึ้นมาแล้วได้ 10 โพแดง คือ $\frac{1}{52}$

2) $P(E_2) = \frac{13}{52}$

$= \frac{1}{4}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มหยิบไพ่ขึ้นมาแล้วได้ ดอกจิก คือ $\frac{1}{4}$

3) $P(E_3) = \frac{4}{52}$

$= \frac{1}{13}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มหยิบไพ่ขึ้นมาแล้วได้ ไพ่ แต้ม 5 คือ $\frac{1}{13}$

4) $P(E_4) = \frac{26}{52}$

$= \frac{1}{2}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มหยิบไพ่ขึ้นมาแล้วได้ ไพ่ โพดำหรือข้าวหลามตัด คือ $\frac{1}{2}$

3.ในการโยนเหรียญ 3 เหรียญ 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้เหตุการณ์ต่อไปนี้

1) ขึ้นหัว 2 เหรียญ

2) ขึ้นก้อย อย่างน้อย 2 เหรียญ

3) ขึ้นก้อยทั้ง 3 เหรียญ

4) ขึ้นหัวเหรียญที่ 1 และขึ้นก้อยเหรียญที่ 3

5) ขึ้นหัว 1 เหรียญ

วิธีทำ

S = {(H,H,H) , (H,H,T) , (H,T,H) , (H,T,T) , (T,H,H) , (T,H,T) , (T,T,H) , (T,T,T)}

n(S) = 8

1) ขึ้นหัว 2 เหรียญ

E = {(H,H,T) , (H,T,H) , (T,H,H)}

$n(E) = 3$

$P(E) = \frac{3}{8}$

2) ขึ้นก้อย อย่างน้อย 2 เหรียญ

E = {(H,T,T) , (T,T,T) , (T,H,T) , (T,T,H)}

$n(E) = 4$

$P(E) = \frac{4}{8}$

$= \frac{1}{2}$

3) ขึ้นก้อยทั้ง 3 เหรียญ

E = {(T,T,T)}

$n(E) = 1$

$P(E) = \frac{1}{8}$

4) ขึ้นหัวเหรียญที่ 1 และขึ้นก้อยเหรียญที่ 3

E = { (H,H,T) , (H,T,T) }

n(E) = 2

P(E) = $\frac{2}{8}$

= $\frac{1}{4}$

5) ขึ้นหัว 1 เหรียญ

E = { (H,T,T) , (T,H,T) , (T,T,H) }

n(E) = 3

P(E) = $\frac{3}{8}$

4. ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้เหตุการณ์ต่อไปนี้

1) ได้ผลรวมของแต้ม เป็นจำนวนเฉพาะ

2) ได้ผลรวมของแต้ม เป็น 13

3) ได้ผลรวมของแต้ม ไม่เกิน 10

วิธีทำ S = { (1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (1,6)

(2,1) , (2,2) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (2,6)

(3,1) , (3,2) , (3,3) , (3,4) , (3,5) , (3,6)

(4,1) , (4,2) , (4,3) , (4,4) , (4,5) , (4,6)

(5,1) , (5,2) , (5,3) , (5,4) , (5,5) , (5,6)

(6,1) , (6,2) , (6,3) , (6,4) , (6,5) , (6,6) }

n(S) = 36

1) ได้ผลรวมของแต้ม เป็นจำนวนเฉพาะ

E = {(1,1) , (1,2) , (1,4) , (1,6) , (2,1) , (2,3) , (2,5) , (3,2) ,

(3,4) , (4,1) , (4,3) , (5,2) , (5,6) , (6,1) , (6,5) }

n(E) = 15

P(E) = $\frac{15}{36}$ หรือ $\frac{5}{12}$

2) ได้ผลรวมของแต้ม เป็น 13

$E = \emptyset$

$n(E) = 0$

$P(E) = 0$

3) ได้ผลรวมของแต้ม ไม่เกิน 10

E = { (1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4) , (1,5) , (1,6)
(2,1) , (2,2) , (2,3) , (2,4) , (2,5) , (2,6)
(3,1) , (3,2) , (3,3) , (3,4) , (3,5) , (3,6)
(4,1) , (4,2) , (4,3) , (4,4) , (4,5) , (4,6)
(5,1) , (5,2) , (5,3) , (5,4) , (5,5) , (6,1)
(6,2) , (6,3) , (6,4) }

$n(E) = 33$

$$P(E) = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$$

5. มีลูกปิงปอง 4 ลูก แต่ละลูกมีหมายเลข 0,1,2,3 กำกับอยู่ลูกละหมายเลข ถ้าสุ่มหยิบลูกปิงปองขึ้นมา 2 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้หมายเลขบนลูกปิงปองรวมกันน้อยกว่า 4 เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ S = {(0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,3)}

$n(S) = 6$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ได้หมายเลขรวมกันน้อยกว่า 4

E = {(0,1), (0,2), (0,3), (1,2)}

$n(E) = 4$

ดังนั้น $P(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้หมายเลขรวมกันน้อยกว่า 4 เป็น $\frac{2}{3}$

ใบความรู้ที่ 3
หน่วยที่ 8 ตอนที่ 1

การใช้วิธีเรียงสับเปลี่ยนช่วยในการหาความน่าจะเป็น

1.หลักการคูณ

ถ้างานอย่างแรกมีวิธีทำได้ n_1 วิธี ในแต่ละวิธีที่เลือกทำงานอย่างแรก มีวิธีที่จะทำงานอย่างที่สองได้ n_2 วิธี และในแต่ละวิธีที่เลือกทำงานอย่างแรก และงานอย่างที่สองมีวิธีที่จะทำงานอย่างที่สามได้ n_3 วิธี ฯลฯ จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกทำงาน k อย่าง เท่ากับ $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ วิธี

2. หลักการบวก

ถ้าต้องการทำงาน k อย่างโดยที่งานแต่ละอย่างสามารถทำได้ $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ วิธี และไม่มีงานคู่ใดเลยที่สามารถทำพร้อมกันได้ แล้วจำนวนวิธีที่จะเลือกทำงานทั้งหมดเท่ากับ $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1 เรือนรับรองหลังหนึ่งมี 3 ห้องนอน ห้องหนึ่งอยู่ได้ 3 คน ส่วนอีก 2 ห้อง อยู่ได้ห้องละ 2 คน ถ้ามีแขก 7 คน เป็นหญิง 3 คน เป็นชาย 4 คน จะเดินทางมาพักโดยไม่ระบุเพศให้ทราบล่วงหน้า ความน่าจะเป็นที่เจ้าภาพจะจัดให้หญิง 3 คน ได้พักอยู่ห้องเดียวกันมีค่าเท่าใด

วิธีทำ การจัดคน 7 คน เข้าห้องนอน ทำได้ $\frac{7!}{3!2!2!} = 210$ วิธี

แสดงว่า $n(S) = 210$

การจัดให้หญิง 3 คน ได้พักอยู่ห้องเดียวกัน มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกห้องนอนที่หญิง 3 คน พักด้วยกันทำได้ $C_{1,1} = 1$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 การจัดผู้ชายที่เหลือ 4 คน เข้าห้องนอนที่เหลือ 2 ห้อง

ทำได้ $\frac{4!}{2!2!} = 6$ วิธี

แสดงว่า $n(E) = 1 \times 6$

$= 6$

จากสูตร $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(s)}$

$= \dfrac{6}{210}$

จะได้ $P(E) = \dfrac{1}{35}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เจ้าภาพจะจัดให้หญิง 3 คน ได้พักอยู่ห้องเดียวกันมีค่าเท่ากับ $\dfrac{1}{35}$

ตัวอย่างที่ 2 มีคน 10 คน ซึ่งใน 10 คนนี้ มีปังปอนด์และปกป้องรวมอยู่ด้วย ถ้าจัดคน 10 คน นั่งเป็นวงกลม จงหาความน่าจะเป็นที่ปังปอนด์และปกป้องจะนั่งติดกัน

วิธีทำ จากโจทย์มีคน 10 คน นั่งเรียงกันเป็นวงกลม

แสดงว่า $n(S) = (10 - 1)!$

$= 9!$

E แทนเหตุการณ์ที่ปังปอนด์และปกป้อง จะนั่งติดกัน

มัดรวมปังปอนด์และปกป้องกลายเป็นคน 1 คน นั่นคือ คนมีทั้งหมด 9 คน

แสดงว่า $n(E) = (9 - 1)! \times 2!$

$= 8! \times 2!$

จากสูตร $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(s)}$

$= \dfrac{8! \times 2!}{9!}$

จะได้ $P(E) = \dfrac{2!}{9}$

$= \dfrac{2}{9}$

ตัวอย่างที่ 3 มีนักเรียน 5 คน รวม ก และ ข ด้วย ยืนแถวตรงหน้าเสาธงแถวเดียว จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่อไปนี้

(1) ก และ ข ยืนติดกัน (E_1)

(2) ก และ ข ยืนอยู่หัวแถวและท้ายแถว (E_2)

(3) ก และ ข ยืนแยกกัน (E_3)

วิธีทำ นักเรียน 5 คน ยืนแถวตรงหน้าเสาธง จะมีวิธีการยืนได้ทั้งหมด $= 5!$ วิธี

นั่นคือ $n(S) = 120$

(1) ก และ ข ยืนติดกัน

สมมตินักเรียน 5 คน ชื่อ ก, ข, ค, ง และ จ โดยให้ ก และ ข ยืนติดกัน

จะจัดได้ดังนี้ ก, ข, ค, ง, จ

มีคนทั้งหมด 4 กลุ่มใหญ่ จะจัดได้ 4! วิธี

ในแต่ละวิธีภายในกลุ่ม ก, ข จะสลับที่กันได้ 2! วิธี

จะได้จำนวนวิธีทั้งหมด $= 4!\,2!$

$= 48$ วิธี

นั่นคือ $n(E_1) = 48$

ดังนั้น $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)}$

$= \frac{48}{120}$

$= \frac{2}{5}$

(2) ก และ ข ยืนอยู่หัวแถว และท้ายแถว

ก, ___ , ___ , ___ , ข

ตำแหน่งหัวแถวและท้ายแถวจะเป็น ก หรือ ข ยืนก็ได้ จะสลับที่กันได้ 2! วิธี

ในแต่ละวิธีมี 3 ตำแหน่ง ระหว่าง ก และ ข จะสลับที่กันได้ 3! วิธี

(ค, ง, จ ยืนสลับที่กันใน 3 ตำแหน่งนั้น)

จะได้จำนวนวิธีในการยืนทั้งหมด $= 2!\,3!$

$= 12$ วิธี

นั่นคือ $n(E_2) = 12$

ดังนั้น $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)}$

$= \frac{12}{120}$

$= \frac{1}{10}$

(3) ให้ ก และ ข ยืนแยกกัน

จำนวนวิธีในการยืนโดยให้ ก และ ข ยืนแยกกัน

= (จำนวนวิธียืนไม่มีเงื่อนไข) − (จำนวน วิธีที่ ก และ ข ยืนติดกัน)

$= 120 - 48$

$= 72$

จะได้ $n(E_3) = 72$

ดังนั้น $P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)}$

$= \frac{72}{120}$

$= \frac{3}{5}$

คำชี้แจง จงหาความน่าจะเป็นในแต่ละข้อต่อไปนี้ (15 คะแนน)

1. จัดชาย 5 คน ยืนเรียงเป็นแถวแนวตรง จงหาความน่าจะเป็นที่ชาย 2 คน ที่กำหนดต้องยืนติดกันเสมอ

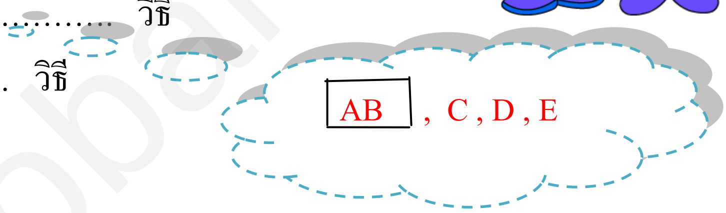
วิธีทำ ชาย 5 คน ยืนเรียงเป็นแถวตรง ได้ทั้งหมด .... วิธี

n(S) = ... วิธี

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ชาย 2 คน ต้องยืนติดกันเสมอ

n(E) = ... วิธี

= .... วิธี



จาก $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(s)}$

ดังนั้น P(E) = ...

= ....

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ชาย 2 คน ที่กำหนดต้องยืนติดกันเสมอ คือ ....

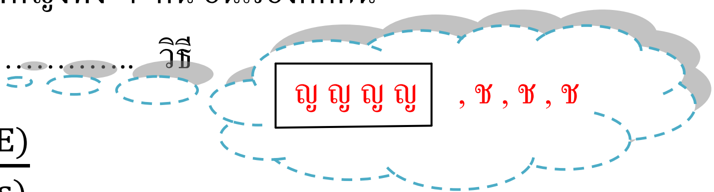
2. ชาย 3 คน และหญิง 4 คน เข้าคิวในแถวเดียวกันเพื่อซื้อตั๋วรถไฟขบวนหนึ่ง ความน่าจะเป็นที่หญิงทั้ง 4 คน จะยืนเรียงติดกันทั้งหมดในแถว จะเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ จำนวนวิธีที่คน 7 คน ยืนเรียงแถวแบบไม่มีเงื่อนไข = ... วิธี

n(S) = ... วิธี

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่หญิงทั้ง 4 คน ยืนเรียงติดกัน

n(E) = ... วิธี



จาก $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(s)}$

ดังนั้น $P(E)$ = ……………………..

= ……………………..

= ……………………

= ……………………..

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หญิงทั้ง 4 คน จะยืนเรียงติดกันทั้งหมดในแถว คือ …………

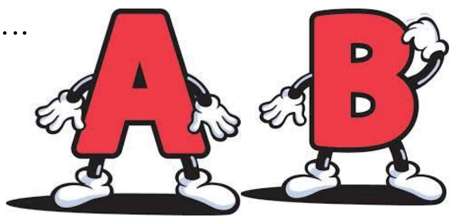
3. สลับตัวอักษรในคำว่า "TOGETHER" อย่างสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ต้องการให้อักษร E 2 ตัวเรียงติดกัน และอักษร T 2 ตัวเรียงติดกัน (E และ T ไม่จำเป็นต้องติดกัน)

วิธีทำ แยกอักษรใหม่เป็น TT , EE , O , G , H , R

$n(S)$ = …………………………………

= ……………………………….. วิธี

$n(E)$ = ………………………………..



จาก $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$

ดังนั้น $P(E)$ = ………………………

= ………………………

4. เรือนรับรองหลังหนึ่งมี 4 ห้องนอน ห้องหนึ่งพักได้ 3 คน ส่วนอีก 3 ห้องพักได้ห้องละ 2 คน ถ้ามีคนมาพักเป็นชาย 3 คน หญิง 6 คน โดยไม่แจ้งเพศให้ทราบล่วงหน้าแล้ว ความน่าจะเป็นที่จะจัดให้ชายพักห้องเดียวกันที่เหลือพักห้องละ 2 คน เป็นเท่าไร

วิธีทำ การจัดคนมาพัก 9 คน เข้าห้องพัก 4 ห้อง ห้องละ 3 คน 2 คน 2 คน 2 คน ตามลำดับ ทำได้ .... = ... วิธี

แสดงว่า $n(S)$ = ………………

จัดให้ชาย 3 คน พักห้องเดียวกันได้ .... วิธี

จัดหญิง 6 คน เข้าพัก 3 ห้อง ห้องละ 2 คน ได้ …………… = …….. วิธี

$n(E) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

จาก $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะจัดให้ชายพักห้องเดียวกันที่เหลือพักห้องละ 2 คน เท่ากับ ………………..

5. มีหลอดไฟลักษณะเหมือนกัน 6 หลอด เป็นหลอดไฟสีแดง 3 หลอด สีเขียว 2 หลอด และสีเหลือง 1 หลอด นำหลอดไฟทั้งหมดมาจัดเรียงประดับเป็นวงกลม ความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดไฟสีเดียวกัน อยู่เรียงติดต่อกันมีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ โจทย์ข้อนี้ เป็นการจัดเรียงของซ้ำกัน เป็นแนววงกลมโดยมีหลอดไฟซ้ำดังนี้

"ดดด ขข ล"

n(S) = จำนวนวิธีจัดเรียงหลอดไฟ เป็นแนววงกลม แบบไม่มีเงื่อนไขใด ๆ

n(S) = ……………….. วิธี

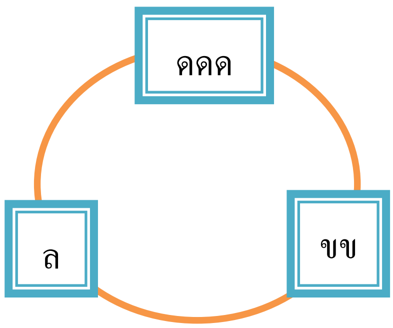
= ………………………

n(E) = จำนวนวิธีจัดเรียงหลอดไฟสีเดียวกัน เรียงติดกัน

= …………………..

= ………………

= ……………… วิธี



ดังนั้น $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 3
หน่วยที่ 8 ตอนที่ 1

คำชี้แจง จงหาความน่าจะเป็นในแต่ละข้อต่อไปนี้ (15 คะแนน)

1. จัดชาย 5 คน ยืนเรียงเป็นแถวแนวตรง จงหาความน่าจะเป็นที่ชาย 2 คน ที่กำหนดต้องยืนติดกันเสมอ

วิธีทำ ชาย 5 คน ยืนเรียงเป็นแถวตรง ได้ทั้งหมด 5! วิธี

n(S) = 120 วิธี

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ชาย 2 คน ต้องยืนติดกันเสมอ

n(E) = 4! 2! วิธี

$\boxed{AB}$, C , D , E

= 48 วิธี

จาก $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(s)}$

ดังนั้น $P(E) = \dfrac{48}{120}$

$= \dfrac{2}{5}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ชาย 2 คน ที่กำหนดต้องยืนติดกันเสมอ คือ $\dfrac{2}{5}$

2. ชาย 3 คน และหญิง 4 คน เข้าคิวในแถวเดียวกันเพื่อซื้อตั๋วรถไฟขบวนหนึ่ง ความน่าจะเป็นที่หญิงทั้ง 4 คน จะยืนเรียงติดกันทั้งหมดในแถว จะเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ จำนวนวิธีที่คน 7 คน ยืนเรียงแถวแบบไม่มีเงื่อนไข = 7! วิธี

n(S) = 5,040 วิธี

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่หญิงทั้ง 4 คน ยืนเรียงติดกัน

n(E) = 4! 4! วิธี

$\boxed{\text{ญ ญ ญ ญ}}$, ช , ช , ช

จาก $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(s)}$

ดังนั้น $P(E) = \dfrac{4!4!}{7!}$

$= \dfrac{(4\times3\times2\times1)\times4!}{7\times6\times5\times4!}$

$= \dfrac{24}{210}$

$= \dfrac{4}{35}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หญิงทั้ง 4 คน จะยืนเรียงติดกันทั้งหมดในแถว คือ $\dfrac{4}{35}$

3. สลับตัวอักษรในคำว่า "TOGETHER" อย่างสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ต้องการให้อักษร E 2 ตัวเรียงติดกัน และอักษร T 2 ตัวเรียงติดกัน (E และ T ไม่จำเป็นต้องติดกัน)

วิธีทำ แยกอักษรใหม่เป็น TT , EE , O , G , H , R

$n(S) = \dfrac{8!}{2!2!}$

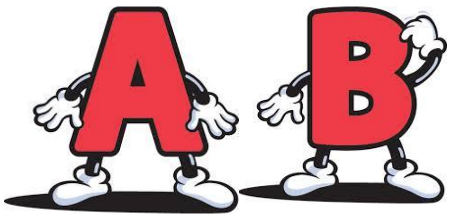
$= 8\times7\times6\times5\times2\times3$ วิธี

$n(E) = 6!$

จาก $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(s)}$

ดังนั้น $P(E) = \dfrac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{8\times7\times6\times5\times2\times3}$

$= \dfrac{1}{14}$



4. เรือนรับรองหลังหนึ่งมี 4 ห้องนอน ห้องหนึ่งพักได้ 3 คน ส่วนอีก 3 ห้องพักได้ห้องละ 2 คน ถ้ามีคนมาพักเป็นชาย 3 คน หญิง 6 คน โดยไม่แจ้งเพศให้ทราบล่วงหน้าแล้ว ความน่าจะเป็นที่จะจัดให้ชายพักห้องเดียวกันที่เหลือพักห้องละ 2 คน เป็นเท่าไร

วิธีทำ การจัดคนมาพัก 9 คน เข้าห้องพัก 4 ห้อง ห้องละ 3 คน 2 คน 2 คน 2 คน ตามลำดับ ทำได้ $\frac{9!}{3!2!2!2!}$ = 7,560 วิธี

แสดงว่า $n(S) = 7{,}560$

จัดให้ชาย 3 คน พักห้องเดียวกันได้ 1 วิธี

จัดหญิง 6 คน เข้าพัก 3 ห้อง ห้องละ 2 คน ได้ $\frac{6!}{2!2!2!}$ = 90 วิธี

$n(E) = 90$

จาก $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

$= \frac{90}{7{,}560}$

$= \frac{1}{84}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะจัดให้ชายพักห้องเดียวกันที่เหลือพักห้องละ 2 คน เท่ากับ $\frac{1}{84}$

5. มีหลอดไฟลักษณะเหมือนกัน 6 หลอด เป็นหลอดไฟสีแดง 3 หลอด สีเขียว 2 หลอด และสีเหลือง 1 หลอด นำหลอดไฟทั้งหมดมาจัดเรียงประดับเป็นวงกลม ความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดไฟสีเดียวกัน อยู่เรียงติดต่อกันมีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ โจทย์ข้อนี้ เป็นการจัดเรียงของซ้ำกัน เป็นแนววงกลมโดยมีหลอดไฟซ้ำดังนี้ "ดดด ขข ล"

$n(S)$ = จำนวนวิธีจัดเรียงหลอดไฟ เป็นแนววงกลม แบบไม่มีเงื่อนไขใด ๆ

$n(S) = \frac{5!}{3!2!}$

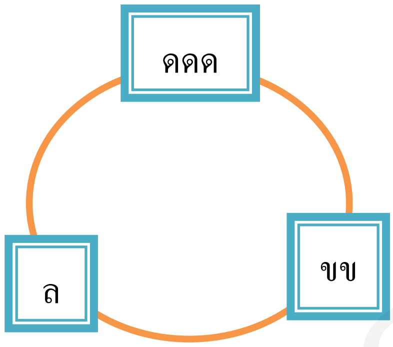
= 10 วิธี

$n(E)$ = จำนวนวิธีจัดเรียงหลอดไฟสีเดียวกัน เรียงติดกัน

$= (3-1)!$

$= 2!$

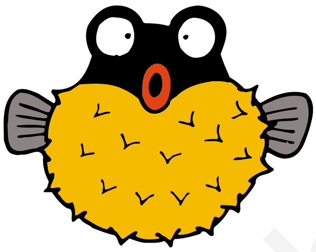
= 2 วิธี

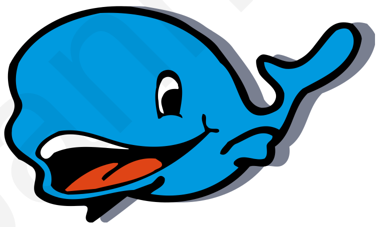


ดังนั้น $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

$$= \frac{2}{10}$$

$$= \frac{1}{5}$$





สรุปเนื้อหาสาระสำคัญ

การหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ ก็คือ...

....

> ความน่าจะเป็น (Probability) ของเหตุการณ์ E คือ ตัวเลขที่บอกให้รู้ว่าเหตุการณ์ E มีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด แทนด้วยสัญลักษณ์ P (E)
>
> ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E = ...

ถ้า S แทน แซมเปิลสเปซ โดยที่สมาชิกแต่ละตัวใน S มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน E แทน เหตุการณ์ใด ๆ และ P(E) แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E แล้ว

....

หมายเหตุ n(E) *คือ* ....

n(S) *คือ* ....

เฉลยสรุปเนื้อหาสาระสำคัญ

การหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ ก็คือ หาว่าเหตุการณ์ดังกล่าวมีโอกาสเกิดขึ้นเท่าใด (หรือ หมายถึง เหตุการณ์ดังกล่าวมีโอกาสเกิดขึ้นกี่เปอร์เซ็นต์นั่นเอง)

ความน่าจะเป็น (Probability) ของเหตุการณ์ E คือ ตัวเลขที่บอกให้รู้ว่าเหตุการณ์ E มีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด แทนด้วยสัญลักษณ์ P (E)

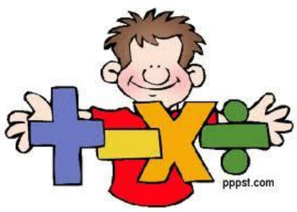
$$\text{ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ } E = \frac{\text{จำนวนสมาชิกในเหตุการณ์ } E}{\text{จำนวนสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง}}$$

ถ้า S แทน แซมเปิลสเปซ โดยที่สมาชิกแต่ละตัวใน S มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน E แทน เหตุการณ์ใด ๆ และ P(E) แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E แล้ว

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

หมายเหตุ n(E) *คือ จำนวนสมาชิกในเหตุการณ์ E*

n(S) *คือ จำนวนสมาชิกในแซมเปิลสเปซ S*



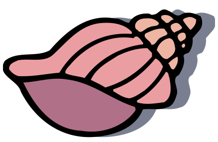
พระพุทธรูปองค์หนึ่งมี 4 พระหัตถ์ แต่ละข้างถือดอกบัก เปลือกหอย จากเหล็ก และไม้กระบองตามลำดับ ถ้าเปลี่ยนลำดับสิ่งของในพระหัตถ์ พระพุทธรูปองค์นี้ก็จะมีชื่อเพิ่มอีกหนึ่งชื่อ และมีวิชาอาคมเพิ่มขึ้นอีก 1 วิชา อยากรู้ว่าพระพุทธรูปองค์นี้จะมีชื่อที่แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่ชื่อ

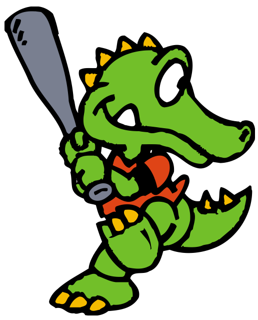
สมมุติให้ A แทนดอกบัว B แทนเปลือกหอย C แทนจานเหล็ก D แทนไม้กระบอง

วิธีคิด ให้สมมุติว่าสิ่งของในพระหัตถ์ข้างหนึ่งของพระพุทธรูปไม่เปลี่ยน แต่ในพระหัตถ์อีก 3 ข้างเปลี่ยนไปตามลำดับ พระพุทธรูปก็จะมีชื่อใหม่ 6 ชื่อ ดังนี้

ABCD	ACDB	ABDC
ADBC	ACBD	ADCB

เนื่องจากพระพุทธรูปมี 4 พระหัตถ์ แสดงว่าจะเกิดการสมมุติทำนองเดียวกัน 4 ครั้ง ดังนั้นพระพุทธรูปองค์นี้จะมีชื่อทั้งหมด $4 \times 6 = 24$ ชื่อ





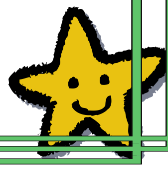
หน่วยที่ 8

เรื่อง ความน่าจะเป็น

ตอนที่ 2 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ (ต่อ)

เวลาเรียน 2 ชั่วโมง

จุดประสงค์การเรียนรู้
หน่วยที่ 8 ตอนที่ 2



1. ด้านความรู้

1) นักเรียนสามารถหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่กำหนดให้ได้

2. ด้านทักษะ/ กระบวนการ

1) นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาสิ่งที่เรียนรู้ได้

2) นักเรียนมีความสามารถในการนำเสนอสิ่งที่เรียนรู้ได้

3) นักเรียนมีความสามารถในการเชื่อมโยงสิ่งที่เรียนรู้ได้

3. ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ : นักเรียน

1) รักชาติ ศาสน์ กษัตริย์

2) ซื่อสัตย์ สุจริต

3) มีวินัย

4) ใฝ่เรียนรู้

5) อยู่อย่างพอเพียง

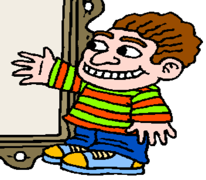
6) มุ่งมั่นในการทำงาน

7) รักความเป็นไทย

8) มีจิตสาธารณะ

9) กตัญญูกตเวที

ใบความรู้ที่ 1
หน่วยที่ 8 ตอนที่ 2



โจทย์การใช้วิธีจัดหมู่กับความน่าจะเป็น

วิธีการจัดหมู่

จำนวนวิธีการจัดหมู่สิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยเลือกมาครั้งละ r สิ่ง เมื่อ $0 \le r \le n$ จะจัดได้เท่ากับ $C_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1 ถ้าหยิบลูกหิน 3 ลูก จากกล่องที่มีลูกหินสีน้ำเงิน 4 ลูก และสีแดง 7 ลูก ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกหินสีน้ำเงิน 3 ลูก เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ การหยิบลูกหิน 3 ลูก จากลูกหินทั้งหมด 11 ลูก ทำได้ $C_{11,3} = 165$ วิธี

แสดงว่า $n(S) = 165$

การหยิบลูกหิน 3 ลูก แล้วหยิบได้ลูกหินสีน้ำเงิน 3 ลูก ทำได้ $C_{4,3} = 4$ วิธี

แสดงว่า $n(E) = 4$

จากสูตร $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(s)}$

จะได้ $P(E) = \dfrac{4}{165}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกหินสีน้ำเงิน 3 ลูก เท่ากับ $\dfrac{4}{165}$

ตัวอย่างที่ 2 ในการสุ่มหยิบลูกกวาดจากกล่องใบหนึ่งซึ่งมีลูกกวาดอยู่ 4 ชนิด ชนิดละ 2 เม็ด ให้แก่เด็กชายสองคน คนละ 4 เม็ด ความน่าจะเป็นที่เด็กแต่ละคนได้ลูกกวาดครบทั้ง 4 นี้มีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ การหยิบลูกกวาด 4 เม็ด จากลูกกวาดทั้งหมด 8 เม็ด ทำได้ $C_{8,4} = 70$ วิธี

แสดงว่า $n(S) = 70$

การหยิบลูกกวาดให้เด็กแต่ละคนได้ลูกกวาดครบทั้ง 4 ชนิด มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หยิบลูกกวาดแต่ละชนิดแบ่งให้เด็กคนแรกชนิดละ 1 เม็ด

ทำได้ $C_{2,1} \times C_{2,1} \times C_{2,1} \times C_{2,1} = 16$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 หยิบลูกกวาดแต่ละชนิดที่เหลือ ให้เด็กคนที่เหลือชนิดละ 1 เม็ด

ทำได้ $C_{1,1} \times C_{1,1} \times C_{1,1} \times C_{1,1} = 1$ วิธี

แสดงว่า $n(E) = 16 \times 1$

$= 16$

จากสูตร $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(s)}$

$= \dfrac{16}{70}$

จะได้ $P(E) = \dfrac{8}{35}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่เด็กแต่ละคนได้ลูกกวาดครบทั้ง 4 ชนิด มีค่าเท่ากับ $\dfrac{8}{35}$

ตัวอย่างที่ 3 กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีขาว 4 ลูก สีแดง 5 ลูก (โดยที่ลูกบอลทั้ง 9 ลูก มีขนาดและลักษณะเหมือนกัน) สุ่มหยิบลูกบอลจากกล่องใบนี้ 3 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีขาวอย่างมาก 2 ลูก เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ สุ่มหยิบลูกบอล 3 ลูกจากลูกบอลทั้งหมด 9 ลูก

แสดงว่า $n(S) = C_{9,3}$

$= 84$ วิธี

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ได้ลูกบอลสีขาวอย่างมาก 2 ลูก

ดังนั้น $n(E) = C_{4,0} \times C_{5,3} + C_{4,1} \times C_{5,2} + C_{4,2} \times C_{5,1}$

$$= \quad 10 + 40 + 30$$

$$= \quad 80$$

$$P(E) = \frac{80}{84}$$

$$= \frac{20}{21}$$

ตัวอย่างที่ 4 สุ่มหยิบหลอดไฟ 2 หลอดจากลังซึ่งมีหลอดไฟดี 8 หลอด และหลอดไฟเสีย 4 หลอด ความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดไฟดีอย่างน้อย 1 หลอด เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ มีหลอดไฟทั้งหมด 12 หลอด สุ่มหยิบมา 2 หลอด

แสดงว่า $n(S) = c_{12,2}$

$= 66$

จำนวนวิธีที่สุ่มหยิบได้หลอดดีอย่างน้อย 1 หลอด แสดงว่า ได้หลอดดี 1 หลอด หรือหลอดดี 2 หลอด

แสดงว่า $n(E) = (c_{8,1}c_{4,1}) + (c_{8,2}c_{4,0})$

$$= \frac{8!}{7!1!} \times \frac{4!}{3!1!} + \frac{8!}{6!2!} \times \frac{4!}{4!0!}$$

$$= (8 \times 4) + (28 \times 1)$$

$$= 32 + 28$$

$$= 60$$

จากสูตร $P(E) = \frac{n(E)}{n(s)}$

$$= \frac{60}{66}$$

จะได้ $P(E) = \frac{10}{11}$

ความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดไฟดีอย่างน้อย 1 หลอด เท่ากับ $\frac{10}{11}$

คำชี้แจง จงหาความน่าจะเป็นในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. สลากชุดหนึ่งมี 10 ใบ มีหมายเลข 1 – 10 กำกับ ถ้าต้องการหยิบสลาก 8 ใบ พร้อมกัน โดยให้ได้สลากที่มีหมายเลขต่ำกว่า 5 อยู่ 3 ใบเท่านั้น แล้วความน่าจะเป็นที่จะหยิบสลากดังกล่าวมีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ การหยิบสลาก 8 ใบ พร้อมกันจากสลากชุดหนึ่งที่มีทั้งหมด 10 ใบ

ทำได้ $C_{10,8}$ = ... วิธี

แสดงว่า $n(S)$ = ...

การหยิบสลาก 8 ใบพร้อมกัน โดยให้ได้สลากที่มีหมายเลขต่ำกว่า 5 อยู่ 3 ใบเท่านั้น แสดงว่าจะต้องหยิบสลากที่มีหมายเลขตั้งแต่ 5 ขึ้นไปอยู่ 5 ใบ

ทำได้ .... = ...

= .... วิธี

แสดงว่า $n(E)$ = ...

จากสูตร $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(s)}$

= ....

จะได้ $P(E)$ = ...

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบสลาก 8 ใบ พร้อมกัน โดยให้ได้สลากที่มีหมายเลขต่ำกว่า 5 อยู่ 3 ใบ เท่านั้น เท่ากับ ....

2. ตะกร้าใบหนึ่งมีส้ม น้อยหน่า และมะม่วงรวม 10 ผล โดยที่จำนวนส้มเป็น 2 เท่าของน้อยหน่า และมีมะม่วงอยู่ 1 ผล ถ้าหยิบผลไม้ขึ้นมา 3 ผลอย่างไม่เจาะจง ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลไม้ชนิดละ 1 ผล เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ มีผลไม้ 10 ผล เป็นมะม่วง 1 ผล จะเป็นส้มและน้อยหน่า 9 ผล

จำนวนส้มเป็น 2 เท่าของจำนวนน้อยหน่า ดังนั้น จะมีส้ม .... ผล และมีน้อยหน่า .... ผล

หยิบผลไม้ 3 ผล จาก 10 ผล ได้ .... = ...

= .... วิธี

ดังนั้น $n(S)$ = ...

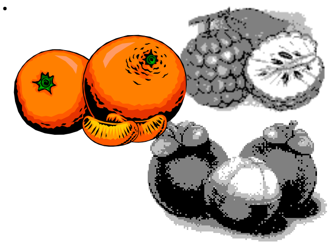
หยิบผลไม้ 3 ชนิด ชนิดละ 1 ผลได้ .... = ...

= .... วิธี

ดังนั้น $n(E)$ = ...

จากสูตร $P(E) = \frac{n(E)}{n(s)}$

= ....



จะได้ $P(E)$ = ...

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลไม้ชนิดละ 1 ผล เท่ากับ ....

3. กล่องใบหนึ่งมีบัตร 5 ใบ ซึ่งมีหมายเลข 1,2,3,4 และ 5 ถ้าหยิบบัตรจากกล่องใบนี้ 3 ใบ พร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มบนบัตรมากกว่า 10

วิธีทำ การหยิบบัตร 3 ใบ พร้อมกันจากกล่องใบหนึ่งที่มีบัตรทั้งหมด 5 ใบ

ทำได้ .... = ...

= .... วิธี

แสดงว่า $n(S)$ = ...

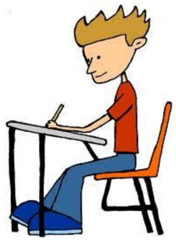
การหยิบบัตรพร้อมกัน 3 ใบ โดยให้มีผลรวมของแต้มบนบัตรมากกว่า 10 ทำได้ 2 วิธี คือ หยิบ .... และหยิบ ....

แสดงว่า $n(E) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

จากสูตร $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(s)}$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

จะได้ $P(E) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบบัตรพร้อมกัน 3 ใบ โดยให้มีผลรวมของแต้มบนบัตรมากกว่า 10 เท่ากับ ....

4. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลขนาดเท่ากัน 9 ลูก เป็นสีขาว 5 ลูก สีแดง 4 ลูก สุ่มหยิบลูกบอลจากกล่อง 3 ลูกพร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีขาวอย่างน้อย 2 ลูก เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ การหยิบลูกบอล 3 ลูก จากลูกบอลทั้งหมด 9 ลูก

ทำได้ .... = ... วิธี

แสดงว่า $n(S) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

การหยิบได้ลูกบอลสีขาวอย่างน้อย 2 ลูก สามารถแบ่งได้ 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 การหยิบได้ลูกบอลสีขาว 2 ลูก สีแดง 1 ลูก

ทำได้ .... = ... วิธี

กรณีที่ 2 การหยิบได้ลูกบอลสีขาว 3 ลูก ทำได้ .... = ... วิธี

แสดงว่า $n(E) = \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ วิธี

จากสูตร $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(s)}$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

จะได้ $P(E) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีขาวอย่างน้อย 2 ลูก เท่ากับ ....

5. ในการเลือกกรรมการนักเรียนจำนวน 4 คน จากผู้สมัครจำนวน 6 คน ซึ่งประกอบด้วย ชาย 4 คน และหญิง 2 คน ความน่าจะเป็นที่คณะกรรมการชุดนี้จะประกอบด้วยนักเรียนชายไม่น้อยกว่า 3 คน เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ การเลือกนักเรียนจำนวน 4 คน จากผู้สมัครจำนวน 6 คน

ทำได้ ………….. = ………… วิธี

แสดงว่า $n(S)$ = …………..

ถ้าคณะกรรมการชุดนี้ประกอบด้วยนักเรียนชายไม่น้อยกว่า 3 คน แล้วสามารถแบ่งได้ 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 คณะกรรมการชุดนี้ประกอบด้วยนักเรียนชาย 4 คน

ทำได้ .... = …………. วิธี

กรณีที่ 2 คณะกรรมการชุดนี้ประกอบด้วยนักเรียนชาย 3 คน และนักเรียนหญิง 1 คน ทำได้ …………….. = ………….. วิธี

แสดงว่า $n(E)$ = ………+………..

= ……….………..

จากสูตร $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$

= ………………

จะได้ $P(E)$ = ……………..…

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่คณะกรรมการชุดนี้จะประกอบด้วยนักเรียนชายไม่น้อยกว่า 3 คน เท่ากับ ……………………

คำชี้แจง จงหาความน่าจะเป็นในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. สลากชุดหนึ่งมี 10 ใบ มีหมายเลข 1 – 10 กำกับ ถ้าต้องการหยิบสลาก 8 ใบ พร้อมกัน โดยให้ได้สลากที่มีหมายเลขต่ำกว่า 5 อยู่ 3 ใบเท่านั้น แล้วความน่าจะเป็นที่จะหยิบสลากดังกล่าวมีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ การหยิบสลาก 8 ใบ พร้อมกันจากสลากชุดหนึ่งที่มีทั้งหมด 10 ใบ

ทำได้ $C_{10,8} = 45$ วิธี

แสดงว่า $n(S) = 45$

การหยิบสลาก 8 ใบพร้อมกัน โดยให้ได้สลากที่มีหมายเลขต่ำกว่า 5 อยู่ 3 ใบเท่านั้น แสดงว่าจะต้องหยิบสลากที่มีหมายเลขตั้งแต่ 5 ขึ้นไปอยู่ 5 ใบ

ทำได้ $C_{4,3} \times C_{6,5} = 4 \times 6$

$= 24$ วิธี

แสดงว่า $n(E) = 24$

จากสูตร $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(s)}$

$= \dfrac{24}{45}$

จะได้ $P(E) = \dfrac{8}{15}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบสลาก 8 ใบ พร้อมกัน โดยให้ได้สลากที่มีหมายเลขต่ำกว่า 5 อยู่ 3 ใบ เท่านั้น เท่ากับ $\dfrac{8}{15}$

2. ตะกร้าใบหนึ่งมีส้ม น้อยหน่า และมะม่วงรวม 10 ผล โดยที่จำนวนส้มเป็น 2 เท่าของน้อยหน่า และมีมะม่วงอยู่ 1 ผล ถ้าหยิบผลไม้ขึ้นมา 3 ผลอย่างไม่เจาะจง ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลไม้ชนิดละ 1 ผล เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ มีผลไม้ 10 ผล เป็นมะม่วง 1 ผล จะเป็นส้มและน้อยหน่า 9 ผล

จำนวนส้มเป็น 2 เท่าของจำนวนน้อยหน่า ดังนั้น จะมีส้ม 6 ผล และมีน้อยหน่า 3 ผล

หยิบผลไม้ 3 ผล จาก 10 ผล ได้ $C_{10,3} = \frac{10!}{7!3!}$

$= 120$ วิธี

ดังนั้น $n(S) = 120$

หยิบผลไม้ 3 ชนิด ชนิดละ 1 ผลได้ $C_{1,1} \times C_{6,1} \times C_{3,1} = 1 \times 6 \times 3$

$= 18$ วิธี

ดังนั้น $n(E) = 18$

จากสูตร $P(E) = \frac{n(E)}{n(s)}$

$= \frac{18}{120}$

จะได้ $P(E) = \frac{3}{20}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลไม้ชนิดละ 1 ผล เท่ากับ $\frac{3}{20}$

3. กล่องใบหนึ่งมีบัตร 5 ใบ ซึ่งมีหมายเลข 1,2,3,4 และ 5 ถ้าหยิบบัตรจากกล่องใบนี้ 3 ใบ พร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มบนบัตรมากกว่า 10

วิธีทำ การหยิบบัตร 3 ใบ พร้อมกันจากกล่องใบหนึ่งที่มีบัตรทั้งหมด 5 ใบ

ทำได้ $C_{5,3} = \frac{5!}{2!\,3!}$

$= 10$ วิธี

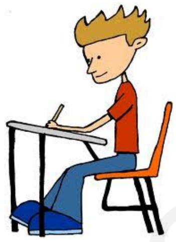
แสดงว่า $n(S) = 10$

การหยิบบัตรพร้อมกัน 3 ใบ โดยให้มีผลรวมของแต้มบนบัตรมากกว่า 10 ทำได้ 2 วิธี คือ หยิบ 2 , 4 , 5 และหยิบ 3 , 4 , 5

แสดงว่า $n(E) = 2$

จากสูตร $P(E) = \frac{n(E)}{n(s)}$

$= \frac{2}{10}$



จะได้ $P(E) = \frac{1}{5}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะหยิบบัตรพร้อมกัน 3 ใบ โดยให้มีผลรวมของแต้มบนบัตรมากกว่า 10 เท่ากับ $\frac{1}{5}$

4. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลขนาดเท่ากัน 9 ลูก เป็นสีขาว 5 ลูก สีแดง 4 ลูก สุ่มหยิบลูกบอลจากกล่อง 3 ลูกพร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีขาวอย่างน้อย 2 ลูก เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ การหยิบลูกบอล 3 ลูก จากลูกบอลทั้งหมด 9 ลูก ทำได้ $C_{9,3} = 84$ วิธี

แสดงว่า $n(S) = 84$

การหยิบได้ลูกบอลสีขาวอย่างน้อย 2 ลูก สามารถแบ่งได้ 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 การหยิบได้ลูกบอลสีขาว 2 ลูก สีแดง 1 ลูก

ทำได้ $C_{5,2} \times C_{4,1} = 40$ วิธี

กรณีที่ 2 การหยิบได้ลูกบอลสีขาว 3 ลูก ทำได้ $C_{5,3} = 10$ วิธี

แสดงว่า $n(E) = 40 + 10$

$= 50$ วิธี

จากสูตร $P(E) = \frac{n(E)}{n(s)}$

$= \frac{50}{84}$

จะได้ $P(E) = \frac{25}{42}$

ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีขาวอย่างน้อย 2 ลูก เท่ากับ $\frac{25}{42}$

5. ในการเลือกกรรมการนักเรียนจำนวน 4 คน จากผู้สมัครจำนวน 6 คน ซึ่งประกอบด้วย ชาย 4 คน และหญิง 2 คน ความน่าจะเป็นที่คณะกรรมการชุดนี้จะประกอบด้วยนักเรียนชายไม่น้อยกว่า 3 คน เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ การเลือกนักเรียนจำนวน 4 คน จากผู้สมัครจำนวน 6 คน

ทำได้ $C_{6,4} = 15$ วิธี

แสดงว่า $n(S) = 15$

ถ้าคณะกรรมการชุดนี้ประกอบด้วยนักเรียนชายไม่น้อยกว่า 3 คน แล้วสามารถแบ่งได้ 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 คณะกรรมการชุดนี้ประกอบด้วยนักเรียนชาย 4 คน

ทำได้ $C_{4,4} = 1$ วิธี

กรณีที่ 2 คณะกรรมการชุดนี้ประกอบด้วยนักเรียนชาย 3 คน และนักเรียนหญิง 1 คน ทำได้ $C_{4,3} \times C_{2,1} = 8$ วิธี

แสดงว่า $n(E) = 1 + 8$

$= 9$

จากสูตร $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(s)}$

$= \dfrac{9}{15}$

จะได้ $P(E) = \dfrac{3}{5}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่คณะกรรมการชุดนี้จะประกอบด้วยนักเรียนชายไม่น้อยกว่า 3 คน เท่ากับ $\dfrac{3}{5}$

โจทย์การใช้วิธีจัดหมู่กับความน่าจะเป็น

วิธีการจัดหมู่

จำนวนวิธีการจัดหมู่สิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง โดยเลือกมาครั้งละ r สิ่ง เมื่อ $0 \leq r \leq n$ จะจัดได้เท่ากับ $C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ วิธี

โจทย์การใช้วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดครั้งละ r สิ่ง

ในการจัดสิ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดครั้งละ r สิ่ง ($r \leq n$) จะจัดได้ทั้งหมด $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

โจทย์การใช้วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมดกับความน่าจะเป็น

วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่มีบางสิ่งซ้ำกัน โดยทั่วไปถ้ามีสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง และมีบางสิ่งซ้ำกัน สมมุติให้มีการซ้ำกัน k กลุ่ม ดังนี้

กลุ่มที่ 1 มีสิ่งของซ้ำกัน n_1 สิ่ง จัดเรียงได้ $n_1!$ วิธี

กลุ่มที่ 2 มีสิ่งของซ้ำกัน n_2 สิ่ง จัดเรียงได้ $n_2!$ วิธี

กลุ่มที่ 3 มีสิ่งของซ้ำกัน n_3 สิ่ง จัดเรียงได้ $n_3!$ วิธี

⋮ ⋮ ⋮

กลุ่มที่ k มีสิ่งของซ้ำกัน n_k สิ่ง จัดเรียงได้ $n_k!$ วิธี

ถ้า $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ จัดเรียงของ n สิ่ง ได้ $n!$ วิธี

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนกลุ่มของสิ่งของ n สิ่ง

เท่ากับ $\dfrac{n!}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k!}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1 ในการจัดหญิง 8 คน ในเรือนรับรองหลังหนึ่งซึ่งมี 4 ห้อง ถ้ามี 1 ห้องที่อยู่ได้ 3 คน มี 2 ห้อง ที่อยู่ได้ห้องละ 2 คน และมี 1 ห้อง ที่อยู่ได้ 1 คน ถ้าอ้อยและอ่อนเป็นหญิง 2 คน ในจำนวน 8 คนนี้ แล้วความน่าจะเป็นที่อ้อยและอ่อนได้อยู่ห้องเดียวกันเท่ากับเท่าไร

วิธีทำ จำนวนวิธีที่จะจัดหญิง 8 คน เข้าห้อง 4 ห้อง ดังกล่าว

ทำได้ $= \dfrac{8!}{3!2!2!1!}$

$= 1{,}680$ วิธี

จำนวนวิธีที่จะจัดให้อ้อยและอ่อนได้อยู่ห้องเดียวกัน จัดได้เป็น 2 กรณี

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้าอ้อยและอ่อนอยู่ห้องพัก 3 คน

จะจัดได้ $= \dfrac{6!}{1!2!2!1!}$

$= 180$ วิธี

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้าให้อ้อยและอ่อนอยู่ห้องพัก 2 คน

จะจัดได้ $= \dfrac{6!}{3!2!1!} \times 2$

$= 120$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะจัดให้อ้อยและอ่อนอยู่ห้องเดียวกัน $= 180 + 120$

$= 300$ วิธี

จากสูตร $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(s)}$

$= \dfrac{300}{1680}$

$= \dfrac{5}{28}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะจัดให้อ้อยและอ่อนอยู่ห้องเดียวกัน เท่ากับ $\dfrac{5}{28}$

ตัวอย่างที่ 2 มีหลอดไฟลักษณะเหมือนกัน 6 หลอด เป็นหลอดไฟสีแดง 3 หลอด สีเขียว 2 หลอด และสีเหลือง 1 หลอด นำหลอดไฟทั้งหมดมาจัดเรียงประดับเป็นวงกลม ความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดไฟสีเดียวกันอยู่เรียงติดต่อกันเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ จำนวนวิธีทั้งหมด หรือ n(S) ในการจัดหลอด 6 หลอด ดังกล่าว เป็นวงกลม

จะจัดได้ $= \dfrac{5!}{3!2!1!}$

$= 10$ วิธี

จำนวนวิธีที่ต้องการคือ n(E) คือจัดแล้วให้สีเดียวกันอยู่ติดกัน

จะจัดได้ $= 2!$

$= 2$ วิธี

จากสูตร $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(s)}$

$= \dfrac{2}{10}$

$$= \frac{1}{5}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะจัดให้หลอดไฟสีเดียวกันอยู่ติดต่อกัน เท่ากับ $\frac{1}{5}$

ตัวอย่างที่ 3 กล่องใบหนึ่งมีลูกแก้วขนาดเดียวกัน 13 ลูก เป็นสีแดง 6 ลูก สีขาว 4 ลูก นอกนั้นเป็นสีเหลือง สุ่มหยิบลูกแก้วมา 2 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วต่างสีกันเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ การหยิบลูกแก้ว 2 ลูก จากลูกแก้วทั้งหมด 13 ลูก ทำได้ $C_{13,2} = 78$ วิธี

แสดงว่า $n(S) = 78$

สุ่มหยิบ 2 ลูก ให้ได้ลูกแก้วสีต่างกันแบ่งเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ได้ลูกแก้วสีแดง 1 ลูก และสีขาว 1 ลูก $= C_{6,1} \times C_{4,1}$

$= 24$ วิธี

กรณีที่ 2 ได้ลูกแก้วสีแดง 1 ลูก และสีเหลือง 1 ลูก $= C_{6,1} \times C_{3,1}$

$= 18$ วิธี

กรณีที่ 3 ได้ลูกแก้วสีขาว 1 ลูก และสีเหลือง 1 ลูก $= C_{4,1} \times C_{3,1}$

$= 12$ วิธี

แสดงว่า $n(E) = 24 + 18 + 54$

$= 54$ วิธี

จากสูตร $P(E) = \frac{n(E)}{n(s)}$

$$= \frac{54}{78}$$

$$= \frac{9}{13}$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีเดียวกัน เท่ากับ $\frac{9}{13}$

แบบฝึกทักษะที่ 2

หน่วยที่ 8 ตอนที่ 2

คำชี้แจง ให้นักเรียนหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่อไปนี้ พร้อมทั้งแสดงวิธีทำ (15 คะแนน)

1. กล่องใบหนึ่งมีหลอดไฟอยู่ 10 หลอด ในจำนวนนี้เป็นหลอดเสีย 3 หลอด นอกนั้นเป็นหลอดดี ถ้าหยิบหลอดไฟออกจากกล่องอย่างสุ่ม 2 หลอด จงหาความน่าจะเป็นที่ไม่มีหลอดเสียติดมาเลย

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. ถ้าจัดสามีภรรยา 4 คู่ นั่งเก้าอี้รอบโต๊ะกลมแล้ว ความน่าจะเป็นที่สามีคนหนึ่งนั่งติดกับภรรยาของเขาเท่ากับเท่าใด

3. มีลูกบาศก์เท่า ๆ กัน 9 อัน เป็นสีแดง 5 อัน สีขาว 4 อัน ถ้านำลูกบาศก์เหล่านี้มาเรียงเป็นแถวยาว แล้วความน่าจะเป็นที่ลูกบาศก์สีแดงอยู่หัวและท้ายแถวเท่ากับเท่าใด

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. ถุงใบหนึ่งมีเหรียญบาทอยู่ 5 อัน เหรียญห้าบาทอยู่ 2 อัน และถุงใบที่สอง มีเหรียญบาท 1 อัน และเหรียญห้าบาท 3 อัน ถ้าหยิบเหรียญออกจากถุง 1 อัน แล้วความน่าจะเป็นที่เหรียญนั้นเป็นเหรียญห้าบาทเท่ากับเท่าใด

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

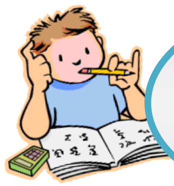
....

....

....

....

5. เรือนรับรองหลังหนึ่งมี 3 ห้องนอน ห้องหนึ่งอยู่ได้ 3 คน ส่วนอีก 2 ห้องอยู่ได้ห้องละ 2 คน มีแขก 7 คน เป็นหญิง 3 คน ชาย 4 คน จะเดินทางมาพักโดยไม่แจ้งเพศให้ทราบล่วงหน้า ความน่าจะเป็นที่เจ้าภาพจะจัดให้หญิง 3 คน ได้พักห้องเดียวกันเท่ากับเท่าใด



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 2
หน่วยที่ 8 ตอนที่ 2

คำชี้แจง ให้นักเรียนหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่อไปนี้ พร้อมทั้งแสดงวิธีทำ (10 คะแนน)

1. กล่องใบหนึ่งมีหลอดไฟอยู่ 10 หลอด ในจำนวนนี้เป็นหลอดเสีย 3 หลอด นอกนั้นเป็นหลอดดี ถ้าหยิบหลอดไฟออกจากกล่องอย่างสุ่ม 2 หลอด จงหาความน่าจะเป็นที่ไม่มีหลอดเสียติดมาเลย

วิธีทำ หยิบหลอดไฟ 2 หลอด จาก 10 หลอด

จะหยิบได้ $= C_{10,2}$

จะได้ว่า $n(S) = 45$ วิธี

หยิบหลอดไฟ 2 หลอดให้ได้หลอดดีทั้งสองหลอด

จะหยิบได้ $= C_{7,2}$

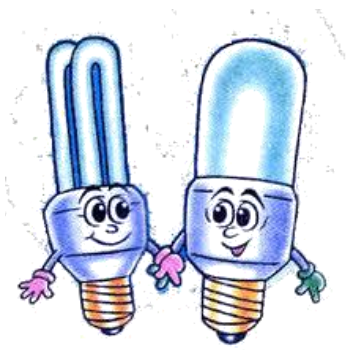
จะได้ว่า $n(E) = 21$ วิธี

จากสูตร $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(s)}$

$= \dfrac{21}{45}$

$= \dfrac{7}{15}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หยิบได้หลอดที่ไม่เสียติดมาเลย เท่ากับ $\dfrac{7}{15}$



2. ถ้าจัดสามีภรรยา 4 คู่ นั่งเก้าอี้รอบโต๊ะกลมแล้ว ความน่าจะเป็นที่สามีคนหนึ่งนั่งติดกับภรรยาของเขาคือเท่าใด

วิธีทำ

หาจำนวนสมาชิกของแซมเปิลสเปซ S เสียก่อน ซึ่งก็คือจำนวนวิธีที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมดจากการจัดคน 8 คน นั่งรอบโต๊ะกลม ซึ่งจะได้ $(8-1)! = 7!$ วิธี

แต่จำนวนที่สามีภรรยาคู่หนึ่งจะนั่งติดกันก็คือ จับสามีภรรยาดังกล่าวมัดติดกันแล้วนำไปนั่งสลับกับคนอื่นๆ จะได้ $(7-1)! = 6!$ วิธี

เนื่องจากสามีและภรรยาคู่ดังกล่าวสลับที่กันอีกได้ $2!$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่สามีและภรรยานั่งติดกันเท่ากับ $2!\,6!$ วิธี

นั่นคือ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ต้องการเท่ากับ $\frac{2!6!}{7!} = \frac{2!}{7!} = \frac{2}{7}$

3. มีลูกบาศก์เท่าๆกัน 9 อัน เป็นสีแดง 5 อัน สีขาว 4 อัน ถ้านำลูกบาศก์ เหล่านี้มาเรียงเป็นแถวยาวแล้วความน่าจะเป็นที่ลูกบาศก์สีแดงอยู่หัวและท้ายแถวเท่ากับเท่าใด

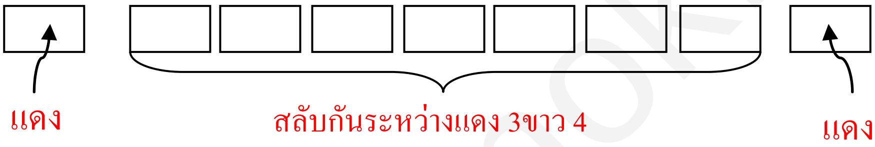
วิธีทำ พิจารณาจำนวนสมาชิกในแซมเปิลสเปซเสียก่อน

จำนวนที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมดจากการจัดลูกบาศก์ทั้ง 9 อัน เป็นแถว

เท่ากับ $\frac{9!}{5!4!}$ วิธี

(เป็นการเรียงสับเปลี่ยนแบบซ้ำกัน)

พิจารณาจำนวนสมาชิกในเหตุการณ์



เนื่องจากเหตุการณ์ดังกล่าวต้องการให้ลูกบาศก์สีแดงอยู่ริมทั้ง 2 ข้าง ดังนั้นเหลือลูกบาศก์ที่ต้องสลับที่กัน 7 อัน โดยมีสีแดง 3 และขาว 4 ซึ่งเป็นการเรียงสับเปลี่ยนแบบซ้ำกันจะได้ $\frac{7!}{3!4!}$

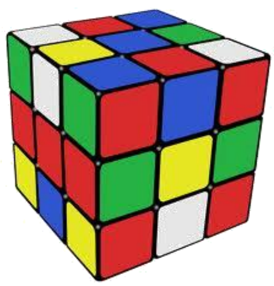
นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ดังกล่าว

$$= \frac{\frac{7!}{3!\,4!}}{\frac{9!}{5!\,4!}}$$

$$= \frac{7!}{3!4!} \times \frac{5!4!}{9!}$$

$$= \frac{5!4!}{9!}$$

$$= \frac{5}{18}$$



4. ถุงใบหนึ่งมีเหรียญบาทอยู่ 5 อัน เหรียญห้าบาทอยู่ 2 อัน และถุงใบที่สองมีเหรียญบาท 1 อัน และเหรียญห้าบาท 3 อัน ถ้าหยิบเหรียญออกจากถุง 1 อัน แล้วความน่าจะเป็นที่เหรียญนั้นเป็นเหรียญห้าบาทเท่ากับข้อใด

วิธีทำ การหยิบเหรียญ 1 เหรียญออกจากถุง โจทย์มิได้กำหนดว่าออกมาจากถุงใบใด ดังนั้นเราต้องคิดทุกกรณีที่เป็นไปได้

กรณีที่ 1 เลือกถุงใบที่ 1 ออกมา ซึ่งความน่าจะเป็นที่จะเลือกถุงใบที่ 1 เท่ากับ $\frac{1}{2}$

จากถุงใบที่ 1 ความน่าจะเป็นที่จะหยิบเหรียญห้าบาทเท่ากับ $\frac{2}{7}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะเลือกถุงใบที่ 1 และหยิบเหรียญห้าบาท

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{7}$$

$$= \frac{1}{7}$$

กรณีที่ 2 เลือกถุงใบที่ 2 ออกมา ซึ่งความน่าจะเป็นที่จะเลือกถุงใบที่ 2 เท่ากับ $\frac{1}{3}$

จากถุงใบที่ 2 ความน่าจะเป็นที่จะหยิบเหรียญห้าบาทเท่ากับ $\frac{3}{4}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะเลือกถุงใบที่ 2 และหยิบเหรียญห้าบาท

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

จากทั้งสองกรณี ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ต้องการเท่ากับ $\frac{1}{7} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{28}$

5. เรือนรับรองหลังหนึ่งมี 3 ห้องนอน น้องหนึ่งอยู่ได้ 3 คน ส่วนอีก 2 ห้อง อยู่ได้ห้องละ 2 คน มีแขก 7 คน เป็นหญิง 3 คน ชาย 4 คน จะเดินทางมาพักโดยไม่แจ้งเพศให้ทราบล่วงหน้า ความน่าจะเป็นที่เจ้าภาพจะจัดให้หญิง 3 คน ได้พักห้องเดียวกันเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ ห้องพัก 3 ห้อง จุ 3 คน และ 2 คน อีก 2 ห้อง จะจัดคน 7 คน

เข้าพัก จะจัดได้ $= \dfrac{7!}{3!2!2!}$

$= 210$ วิธี

จำนวนวิธีที่จะจัดหญิง 3 คน เข้าห้องพัก 3 คน ได้ 1 วิธี

ชาย 4 คน จัดเข้าพักห้องละ 2 คน

จะจัดได้ $= \dfrac{4!}{2!2!}$

$= 6$ วิธี

นั่นคือ จำนวนวิธีที่จะจัดหญิง 3 คน ชาย 4 คน เข้าพักตามต้องการ

จะจัดได้ $= 1 \times 6$

$= 6$ วิธี

จากสูตร $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(s)}$

$= \dfrac{6}{210}$

$= \dfrac{1}{35}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะจัดให้หญิง 3 คนพักห้องเดียวกัน เท่ากับ $\dfrac{1}{35}$

แบบทดสอบหลังเรียน

เรื่อง ความน่าจะเป็น

คำชี้แจง ให้นักเรียนกากบาท (×) ทับหน้าข้อที่ถูกที่สุดเพียงข้อเดียวลงในกระดาษคำตอบ (20 คะแนน)

1. นักเรียนห้องหนึ่งประกอบด้วยเด็กชาย 10 คน เด็กหญิง 20 คน ในจำนวนนี้มีครึ่งหนึ่งของเด็กชายที่ชอบเล่นกีฬา และครึ่งหนึ่งของเด็กหญิงชอบเล่นกีฬา ถ้าเลือกเด็ก 1 คน จากห้องนี้ จงหาความน่าจะเป็นที่เด็กคนนี้เป็นเด็กชายหรือเด็กที่ชอบเล่นกีฬา

   ก. $\frac{1}{3}$

   ข. $\frac{2}{3}$

   ค. $\frac{2}{5}$

   ง. $\frac{1}{2}$

2. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 5 ลูก สีดำ 8 ลูก สีขาว 4 ลูก หยิบลูกบอล 3 ลูก ออกจากกล่อง จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกบอลทั้ง 3 ลูกเป็นคนละสีกัน

   ก. $\frac{9}{22}$

   ข. $\frac{5}{27}$

   ค. $\frac{4}{17}$

   ง. $\frac{3}{7}$

3. ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง แล้วลูกเต๋าขึ้นแต้มเหมือนกัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ผลรวมของแต้มเป็น 8

ก. $\frac{4}{6}$
ข. $\frac{1}{6}$
ค. $\frac{2}{6}$
ง. $\frac{3}{6}$

4. การทดลองโยนเหรียญสมดุล 1 อัน 3 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ได้หัว 2 ครั้งคือข้อใด

ก. $\frac{4}{8}$
ข. $\frac{3}{8}$
ค. $\frac{2}{8}$
ง. $\frac{1}{8}$

5. ถ้าเลือกคน 2 คน จากสามี ภรรยา 6 คู่ จงหาความน่าจะเป็นที่คนทั้ง 2 คนนั้นเป็นชาย 1 คน หญิง 1 คน

ก. $\frac{7}{11}$
ข. $\frac{8}{12}$
ค. $\frac{1}{2}$
ง. $\frac{6}{11}$

6.กล่องใบหนึ่งบรรจุหลอดไฟ 12 หลอด มีหลอดเสีย 3 หลอด สุ่มหยิบหลอดไฟมา 2 หลอด จากกล่องใบนี้ ความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดดีทั้งหมดคือข้อใด

ก. $\frac{34}{66}$
ข. $\frac{35}{66}$
ค. $\frac{6}{11}$
ง. $\frac{32}{66}$

7. มีลูกบาศก์สีแดง 6 อัน และสีขาว 4 อัน วางเป็นแถว จงหาความน่าจะเป็นที่มีลูกบาศก์สีเดียวกันสองอันอยู่ตรงกลาง

ก. $\frac{7}{13}$

ข. $\frac{7}{8}$

ค. $\frac{7}{15}$

ง. $\frac{12}{29}$

8. ในเที่ยวบินเที่ยวหนึ่งมีผู้โดยสารทั้งหมด 20 คน ซึ่งในจำนวนนี้มีนักหนังสือพิมพ์จำนวน 3 คน ก่อนที่จะถึงสนามบินนักบินรายงานว่ามีผู้บาดเจ็บ 3 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้บาดเจ็บ 3 คนนั้นเป็นนักหนังสือพิมพ์

ก. $\frac{1}{C_{20,3}}$

ข. $\frac{1}{20}$

ค. $\frac{3}{20}$

ง. $\frac{5}{C_{20,3}}$

9. ในลิ้นชักมีถุงเท้า 4 คู่ เป็นถุงเท้าสีดำ 2 คู่ และสีขาว 2 คู่ ถ้าทำการทดลองสุ่ม โดยหยิบถุงเท้ามาสองคู่ ให้หาความน่าจะเป็นที่จะได้ถุงเท้าทั้งสองคู่เป็นสีเดียวกัน

ก. $\frac{1}{4}$

ข. $\frac{1}{6}$

ค. $\frac{2}{4}$

ง. $\frac{2}{6}$

10. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีขาว 3 ลูก และสีดำ 2 ลูก ถ้าหยิบลูกบอล 2 ครั้ง ๆ ละ 1 ลูก โดยที่หยิบครั้งแรกแล้วไม่ใส่คืน จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลสีดำทั้ง 2 ลูก

ก. $\frac{1}{10}$

ข. $\frac{4}{10}$

ค. $\frac{2}{10}$

ง. $\frac{3}{10}$

กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน

ชื่อ...เลขที่......................

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				
9.				
10.				
รวม				

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

ชื่อ..เลขที่.....................

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1.		×		
2.			×	
3.		×		
4.		×		
5.				×
6.			×	
7.			×	
8.	×			
9.				×
10.	×			
รวม				

บรรณานุกรม

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. **คู่มือสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1**. กรุงเทพฯ : พ.ศ. พัฒนา, 2553.

จิรัชย์ สุขะเกตุ. **ความน่าจะเป็นและทฤษฎีสถิติเบื้องต้น.** กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2548.

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. **วิชาคณิตศาสตร์ ม.4-ม.5-ม.6 = Mathematics [electronic resource]**. กรุงเทพฯ : ศูนย์การศึกษาต่อเนื่องแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2544.

ฉวีวรรณ เศวตมาลย์ และคนอื่น ๆ . คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 ม. 4 – 6 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ประสานมิตร จำกัด , 2545.

ณรงค์ ปั้นนิ่ม และจินดา อยู่เป็นสุข. คณิตศาสตร์พื้นฐาน ม.5 เล่ม 2 ช่วงชั้นที่ 4 (ม. 4 – ม.6). กรุงเทพฯ : หจก. สำนักพิมพ์ ภูมิบัณฑิต, ม.ป.ป.

ประชา ศิวเวทกุล. **กุญแจคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 สาระการเรียนพื้นฐาน.** กรุงเทพฯ : เดอะบุคส์, 2547.

__________. **กุญแจคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม.** กรุงเทพฯ : เดอะบุคส์, 2548.

ปรีชา ศิวเวทกุล. **กุญแจคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 1 สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม**. กรุงเทพฯ : เดอะบุคส์, 2548.

พิสมัย ศรีวิศร และ พิพัฒน์พงษ์ ศรีวิศร. **คู่มือประกอบการเรียนรู้ คณิตศาสตร์พื้นฐาน ม.5 เล่ม 1.** กรุงเทพฯ : เดอะบุคส์, 2549.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. **คู่มือครูสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : กระทรวงศึกษาธิการ, 2544.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544.** กรุงเทพฯ : คุรุสภาลาดพร้าว, 2547.

สมัย เหล่าวานิชย์ และ พัวพรรณ เหล่าวานิชย์. คณิตศาสตร์พื้นฐานและเพิ่มเติมช่วงชั้นที่ 4 (มัธยมศึกษาปีที่ 4 - 6) เล่ม 5 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. กรุงเทพฯ : ธีระพงษ์การพิมพ์, ม.ป.ท.

สมัย เหล่าวานิชย์. **คู่มือคณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 3 : Modern Academic Maths.** กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง, 2549.