

แบบฝึกหัดทักษะคณิตศาสตร์

เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

ชุดที่ 4 เรื่อง อนุพันธ์อันดับสูง

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4y}{dx^4}$$



โดย
นายกฤษฎา ศิริมา
ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะครูชำนาญการ
โรงเรียนมัธยมประชานิเวศน์
สำนักงานเขตจตุจักร กรุงเทพมหานคร



คำชี้แจงเกี่ยวกับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. เอกสารฉบับนี้ เป็นแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน รายวิชา
คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค 30206 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 มีทั้งหมด 5 ชุด ดังนี้

- ชุดที่ 1 บทนิยามของอนุพันธ์
- ชุดที่ 2 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร
- ชุดที่ 3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ
- ชุดที่ 4 อนุพันธ์อันดับสูง
- ชุดที่ 5 การประยุกต์ของอนุพันธ์

2. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ในแต่ละชุดประกอบด้วย
เอกสารจำนวน 2 เล่ม ซึ่งใช้ควบคู่กันในการจัดการเรียนการสอน คือ

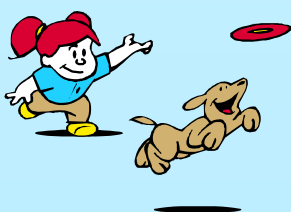
- เล่มที่ 1 คู่มือการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ (สำหรับครูผู้สอน)
- เล่มที่ 2 แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ (สำหรับนักเรียน)



3. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่องอนุพัทธ์ของฟังก์ชัน ฉบับนี้เป็นแบบฝึกทักษะ ชุดที่ 4 อนุพัทธ์อันดับสูง ประกอบด้วย

- 3.1 คำชี้แจงเกี่ยวกับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
- 3.2 คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับครู
- 3.3 คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับนักเรียน
- 3.4 ขั้นตอนการเรียนรู้ โดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์
- 3.5 ใบความรู้
- 3.6 ใบกิจกรรม
- 3.7 แบบฝึกทักษะ
- 3.8 แบบทดสอบหลังเรียน
- 3.9 เอกสารอ้างอิง
- 3.10 เฉลยใบกิจกรรม
- 3.11 เฉลยแบบฝึกทักษะ
- 3.12 เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน
- 3.13 เกณฑ์การให้คะแนน
- 3.14 แบบบันทึกคะแนน

4. แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ฉบับนี้ ใช้เวลาเรียน 2 ชั่วโมง



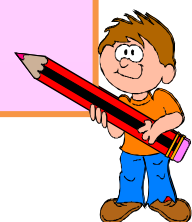


คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

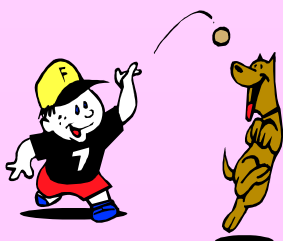
สำหรับครูผู้สอน

การใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพัทธ์ของฟังก์ชัน รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค 30206 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ครูผู้สอน เป็นผู้ที่มีความสำคัญที่จะช่วยให้การดำเนินการเรียนรู้ของนักเรียนบรรลุวัตถุประสงค์ ดังนั้น ครูผู้สอนจึงควรศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับการปฏิบัติตนก่อนที่จะใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพัทธ์ของฟังก์ชัน ดังนี้

1. ครูต้องศึกษาแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพัทธ์ของฟังก์ชัน และอ่านเนื้อหาสาระอย่างละเอียดรอบคอบ พร้อมทั้งทำความเข้าใจกับเนื้อหาทุกชุดก่อนการใช้งาน
2. ครูเตรียมแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพัทธ์ของฟังก์ชัน ให้ครบถ้วน และเพียงพอกับจำนวนนักเรียน
3. ครูเตรียมเครื่องมือวัดผล และประเมินผล เพื่อให้ทราบความก้าวหน้าของนักเรียน
4. ครูชี้แจงให้นักเรียนทราบลำดับขั้นตอน วิธีการสอนของครู และประโยชน์ที่ได้จากการเรียนโดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพัทธ์ของฟังก์ชัน อย่างชัดเจน
5. ครูชี้แจงให้นักเรียนทราบเกี่ยวกับบทบาทของนักเรียนในการเรียน โดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพัทธ์ของฟังก์ชัน ให้เข้าใจ และเน้นย้ำเรื่องความซื่อสัตย์สุจริตในระหว่างการเรียนรู้ โดยไม่ลอกเพื่อน ไม่ให้เพื่อนทำ หรือไม่ดูเฉลยก่อนลงมือทำด้วยตนเอง
6. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ
7. ดำเนินการสอนตามกิจกรรมที่กำหนดไว้ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 14 – 15
8. ให้นักเรียนศึกษาเนื้อหา และทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพัทธ์ของฟังก์ชัน ชุดที่ 4 อนุพัทธ์อันดับสูง



9. ครูสังเกตความตั้งใจของนักเรียน ความสนใจในการเรียน การทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มของนักเรียนทุกกลุ่มอย่างใกล้ชิด ถ้ากลุ่มใดมีปัญหา ครูจะได้ทำการช่วยเหลือได้ทันที
10. เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียน โดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ของนักเรียนในแต่ละคน หรือแต่ละกลุ่ม อาจจะไม่เท่ากัน ครูควรยืดหยุ่นตามความเหมาะสมตามสถานการณ์
11. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน เพื่อประเมินความก้าวหน้าของนักเรียน
12. การสรุปบทเรียน ควรเป็นกิจกรรมร่วมกันของนักเรียนทุกกลุ่ม หรือแต่ละกลุ่ม ส่งตัวแทนมาร่วมอภิปรายเรื่องที่เรียนมา
13. ในกรณีที่นักเรียนคนใดขาดเรียน ให้นักเรียนศึกษาเป็นรายบุคคลนอกเวลาเรียน จากแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน
14. การจัดชั้นเรียน อาจจัดให้นักเรียนศึกษาเป็นรายบุคคล หรือรายกลุ่มก็ได้



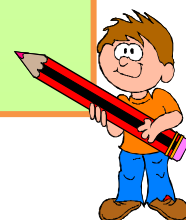
คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

สำหรับนักเรียน



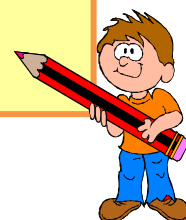
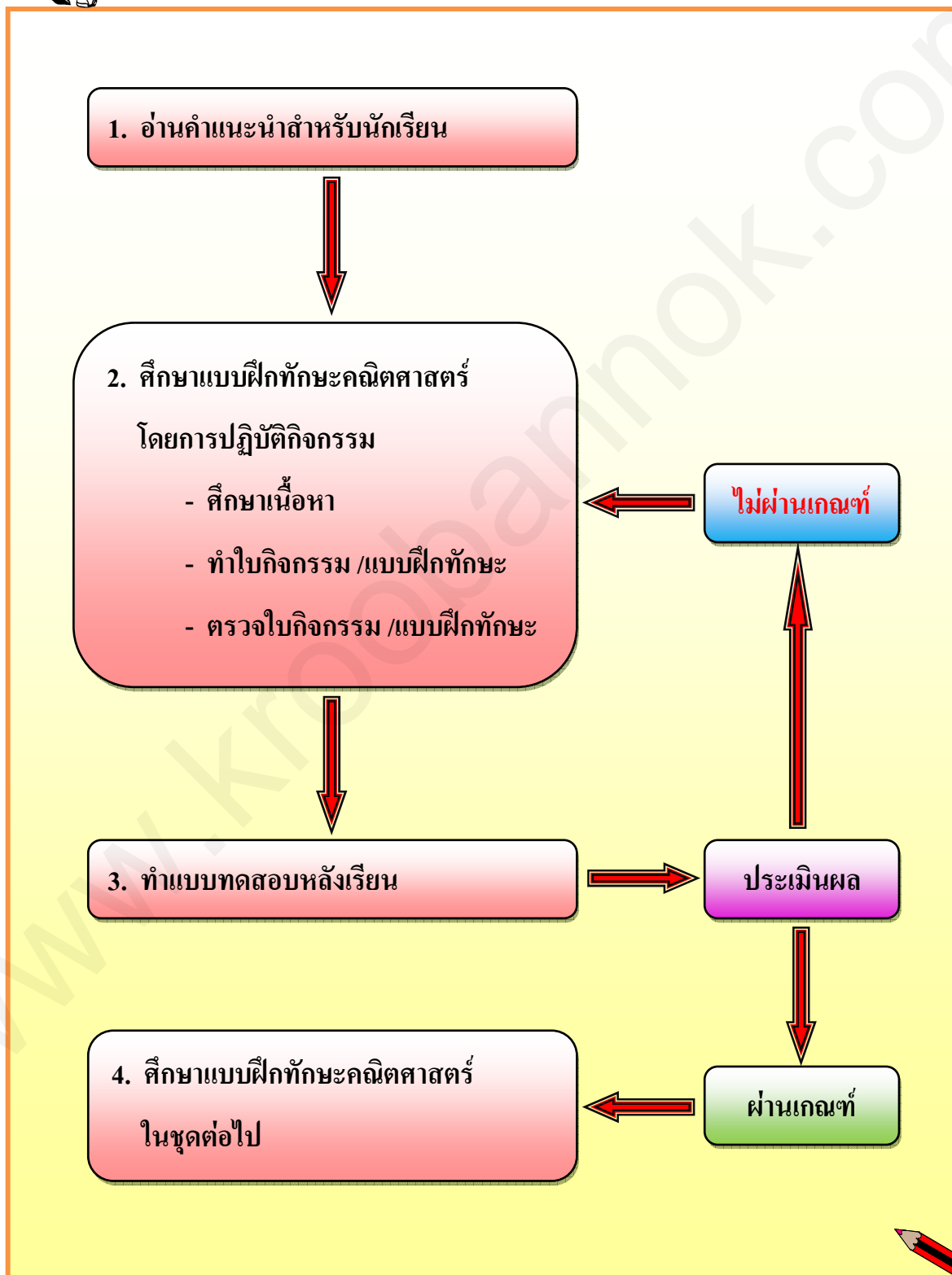
การใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพันธของฟังก์ชัน รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค 30206 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 แคลคูลัสเบื้องต้น ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 นักเรียนควรปฏิบัติตามคำแนะนำ ดังนี้

1. อ่านคำชี้แจงเกี่ยวกับแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพันธของฟังก์ชัน และคำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพันธของฟังก์ชัน สำหรับนักเรียน ให้เข้าใจก่อนศึกษาเนื้อหา ทำกิจกรรม หรือแบบฝึกทักษะ ทุกครั้ง
2. นักเรียนต้องศึกษาเนื้อหา ก่อนทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพันธของฟังก์ชัน ชุดที่ 4 อนุพันธอันดับสูง ถ้านักเรียนทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพันธของฟังก์ชัน ไม่ได้ ให้นักเรียนกลับไปศึกษาเนื้อหา และตัวอย่างใหม่อีกครั้ง หรือปรึกษาครูผู้สอน
3. เมื่อนักเรียนทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพันธของฟังก์ชัน เสร็จเรียบร้อยแล้ว ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจแบบฝึกตามที่ครูเฉลย และบันทึกคะแนนที่ได้ จากนั้นร่วมกันสรุปองค์ความรู้ โดยครูคอยชี้แนะแนวทาง และอธิบายเพิ่มเติม
4. นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน เพื่อประเมินความรู้ของตนเอง หลังการศึกษา และทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพันธของฟังก์ชัน จบแล้ว
5. ในการทำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง อนุพันธของฟังก์ชัน และทำแบบทดสอบหลังเรียน นักเรียนต้องพยายามทำด้วยความตั้งใจ และมีความซื่อสัตย์สุจริต ต่อตนเองให้มากที่สุด





ขั้นตอนการเรียน โดยใช้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์

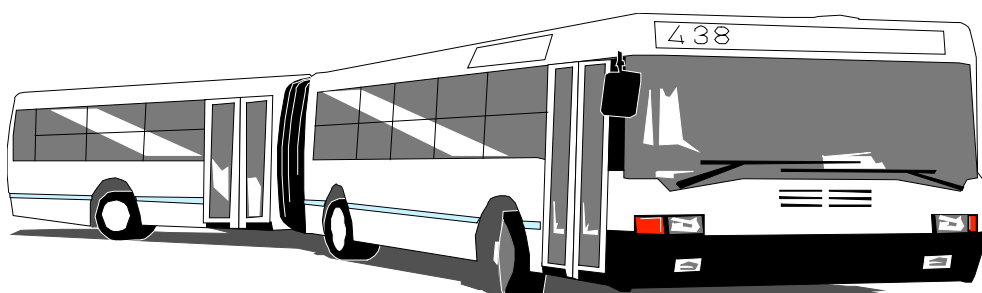


จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

หาอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้

ระยะเวลาที่ใช้ 2 ชั่วโมง



ใบความรู้ที่ 4.1

อนุพันธ์อันดับสูง

จากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ผ่านมาจะพบว่า เมื่อเราหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ใด ๆ ได้เป็น $f'(x)$ ซึ่งอนุพันธ์ดังกล่าวเรียกว่า อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ $f(x)$ ซึ่ง f' เป็นฟังก์ชันอีกฟังก์ชันหนึ่ง และอาจพิจารณาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ได้อีก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f'(x)$

วิธีทำ

จาก $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2$

จะได้
$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(4x^3 - 5x^2 + 3x - 2)$$
$$= 12x^2 - 10x + 3$$

หรือ $f'(x) = 12x^2 - 10x + 3$

นั่นคือ
$$\frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{dx}(12x^2 - 10x + 3)$$
$$= 24x - 10$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f'(x)$ คือ $24x - 10$

บทนิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ และ $f'(x)$ เป็นอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้แล้ว จะเรียกอนุพันธ์ของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x หรือ อนุพันธ์ของ f' ที่ x ว่า อนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f ที่ x เขียนแทนด้วย $f''(x)$



หมายเหตุ

นอกจากนี้ยังมีสัญลักษณ์อื่นที่ใช้แทนอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f ที่ x อีก เช่น

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2}{dx^2}f(x) \text{ และ } y'' \text{ เป็นต้น}$$

ในการทำนองเดียวกัน เราสามารถหาอนุพันธ์อันดับที่มากขึ้นของ $f(x)$ ได้ ดังนี้

$$\text{อนุพันธ์อันดับที่ 3 ของ } f(x) \text{ เขียนแทนด้วย } \frac{d^3y}{dx^3} \text{ หรือ } f'''(x)$$

$$\text{อนุพันธ์อันดับที่ 4 ของ } f(x) \text{ เขียนแทนด้วย } \frac{d^4y}{dx^4} \text{ หรือ } f^{(4)}(x)$$

$$\text{อนุพันธ์อันดับที่ 5 ของ } f(x) \text{ เขียนแทนด้วย } \frac{d^5y}{dx^5} \text{ หรือ } f^{(5)}(x)$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$\text{อนุพันธ์อันดับที่ } n \text{ ของ } f(x) \text{ เขียนแทนด้วย } \frac{d^ny}{dx^n} \text{ หรือ } f^{(n)}(x)$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 4x - 1$

วิธีทำ จาก $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 4x - 1$

จะได้
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 4x - 1) \\ &= 8x^3 - 9x^2 + 10x + 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}(8x^3 - 9x^2 + 10x + 4) \\ &= 24x^2 - 18x + 10 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $f'''(x)$ ของ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

วิธีทำ จาก $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

จะได้ $f'(x) = 6x^2 - 6x + 5$

$$f''(x) = 12x - 6$$

ดังนั้น $f'''(x) = 12$



ใบกิจกรรมที่ 4.1

คำชี้แจง

จงหาอนุพันธ์ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. กำหนดให้ $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ จงหา $f''(x)$

วิธีทำ

2. กำหนดให้ $f(x) = 5x^6 + 3x + \sqrt{x} - 4$ จงหา $f''(x)$

วิธีทำ

3. กำหนดให้ $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$ จงหา $f''(x)$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. กำหนดให้ $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$ จงหา $f'''(x)$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



5. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt[5]{x} - \frac{3}{x} + 2x^2$ จงหา $f''(x)$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x}{x+1}$ จงหา $f''(x)$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

.....



.....

.....

.....

.....

.....



วิธีทำ

[illegible]

10. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ จงหา $f''(1)$

วิธีทำ



แบบฝึกทักษะที่ 4.1



คำชี้แจง

ให้นักเรียนเลือกคำตอบทางขวามือ นำมาเติมหน้าข้อต่อไปนี้ให้ถูกต้อง

___ 1. $f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 2x - 3$

A. $f''(x) = 30x$

___ 2. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2$

B. $f''(x) = 12x^2 - 12x + 10$

___ 3. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 4$

C. $f''(x) = 6x - 4$

___ 4. $f(x) = x^2 - 2x + 5$

D. $f''(x) = 12x + 4$

___ 5. $f(x) = 7x^3 - 8x^2$

E. $f''(x) = 42x^5 - 2$

___ 6. $f(x) = x^2(x^2 - 2x + 5)$

F. $f''(x) = 30x - 12$

___ 7. $f(x) = x^2(x^5 - 1)$

G. $f''(x) = 42x - 16$

___ 8. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$

H. $f''(x) = 36x^2 - 10$

___ 9. $f(x) = 2x(x^2 + x + 1)$

I. $f''(x) = 2$

___ 10. $f(x) = \frac{5x^5 + 2x^3 - 7x^2}{x^2}$

J. $f''(x) = 12x^2 - 12x + 2$

ตารางบันทึกคะแนน

แบบฝึกทักษะ ที่ 4.1

คะแนนเต็ม

คะแนนที่ได้

10



ใบความรู้ที่ 4.2

อนุพันธ์อันดับสูง

ตัวอย่างเพิ่มเติม

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 6x + 3$ จงหาอนุพันธ์อันดับสูงทั้งหมดของ f

วิธีทำ จาก $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 6x + 3$

จะได้ $f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 8x - 6$

$$f''(x) = 20x^3 - 36x^2 + 12x - 8$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 72x + 12$$

$$f^{(4)}(x) = 120x - 72$$

$$f^{(5)}(x) = 120$$

$$f^{(6)}(x) = 0$$

$$f^{(7)}(x) = 0$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = 0$$

นั่นคือ $f^{(n)}(x) = 0$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 6$



ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $f(x) = (x^2 - 1)^4$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

วิธีทำ จาก $f(x) = y = (x^2 - 1)^4$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = 4(x^2 - 1)^3(2x)$

$$= 8x(x^2 - 1)^3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8x(3)(x^2 - 1)^2(2x) + (x^2 - 1)^3(8)$$

$$= 48x^2(x^2 - 1)^2 + 8(x^2 - 1)^3$$

$$= 8(x^2 - 1)^2[6x^2 + (x^2 - 1)]$$

$$= 8(x^2 - 1)^2(7x^2 - 1)$$

ดังนั้น $\frac{d^2y}{dx^2} = (56x^2 - 8)(x^2 - 1)^2$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{x} + 4x^2$ จงหา $f''(1)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{x} + 4x^2$

$$= x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-1} + 4x^2$$

จะได้ $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 2x^{-2} + 8x$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} - 4x^{-3} + 8$$

ดังนั้น $f''(1) = -\frac{2}{9}(1)^{-\frac{5}{3}} - 4(1)^{-3} + 8$

$$= -\frac{2}{9} - 4 + 8$$

$$= -\frac{2}{9} + 4$$

$$= \frac{-2 + 36}{9}$$

$$= \frac{34}{9}$$





คำชี้แจง

จงหาอนุพันธ์ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. กำหนดให้ $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 6x + 9$ จงหาอนุพันธ์อันดับสูง
ทั้งหมดของ f

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. กำหนดให้ $f(x) = (x-1)^3(x+2)^4$ จงหา $f''(x)$

วิธีทำ

.....

.....

.....

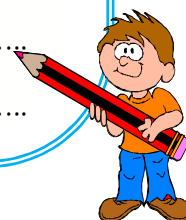
.....

.....

.....

.....

.....



3. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}}$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

วิธีทำ

4. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x$ จงหา $f^{(4)}(a)$ เมื่อ $a = -\frac{1}{2}$

วิธีทำ



5. กำหนดให้ $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ จงหา $f'''(a)$ เมื่อ $a = 1$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตารางบันทึกคะแนน
แบบฝึกทักษะ ที่ 4.2

คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้
10	





แบบทดสอบหลังเรียน

- คำชี้แจง :**
1. แบบทดสอบนี้เป็นแบบปรนัย เลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ เวลา 20 นาที
 2. ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย ✕ ลงบนคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. กำหนดให้ $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 6x - 7$ แล้ว $f''(x)$ คือข้อใด

ก. $12x^2 + 4x - 6$

ข. $24x + 4$

ค. $12x^3 + 4x^2 - 6$

ง. $24x^2 + 4$

2. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + 3$ แล้ว $f''(x)$ คือข้อใด

ก. $3x^2 - 2x$

ข. $x^3 - x^2 + x - 1$

ค. $3x^2 - 2x + 1$

ง. $3x^3 - 2x^2 + x - 1$

3. กำหนดให้ $f(x) = 2x^4 - \frac{1}{x^2}$ แล้ว $\frac{d^3y}{dx^3}$ คือข้อใด

ก. $48x$

ข. $48x^2 + 2$

ค. $8x^3 + 2x$

ง. $24x^2 + 2$

4. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}$ แล้วอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน คือข้อใด

ก. $\frac{-x^2 + 6x - 1}{(x^2 - 1)^2}$

ข. $\frac{x^2 - x + 2}{(x^2 - 1)^2}$

ค. $\frac{2x^3 + 30x^2 + 10x - 6}{(x^2 - 1)^3}$

ง. $\frac{2x^3 - 18x^2 + 14x - 6}{(x^2 - 1)^3}$

5. กำหนดให้ $f(x) = \frac{5\sqrt{x} - 3x^2}{\sqrt{x}}$ แล้ว $\frac{d^2y}{dx^2}$ คือข้อใด

ก. $-\frac{9\sqrt{x}}{2}$

ข. $-\frac{9}{4\sqrt{x}}$

ค. $-\frac{9}{2\sqrt{x}}$

ง. $-\frac{9}{\sqrt{x}}$

6. กำหนดให้ $f(x) = x^3(2x^2 + 5x + 4)$ แล้ว $f''(1)$ คือข้อใด

ก. 124

ข. 144

ค. 244

ง. 284

7. กำหนดให้ $f(x) = (2x - 1)^2(x - 5)$ แล้ว $f''(0)$ คือข้อใด

ก. -19

ข. -26

ค. -44

ง. -48

8. กำหนดให้ $f(x) = 16^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{3}{4}} - 8x^{-\frac{1}{4}}$ แล้ว $f'''(1)$ คือข้อใด

ก. $\frac{43}{16}$

ข. $\frac{91}{16}$

ค. $-\frac{43}{16}$

ง. $-\frac{91}{16}$

9. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{4x+1}$ แล้ว $f''(2)$ คือข้อใด

ก. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

ข. $-\frac{4}{27}$

ค. $\frac{2}{3}$

ง. $-\frac{4}{9}$

10. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^2 + 3}{2\sqrt{x}}$ แล้ว $f''(1)$ คือข้อใด

ก. 0

ข. 1

ค. $\frac{3}{2}$

ง. $\frac{9}{16}$

กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน

ข้อ	ก.	ข.	ค.	ง.
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				
9.				
10.				

คะแนนเต็ม

10

คะแนนที่ได้

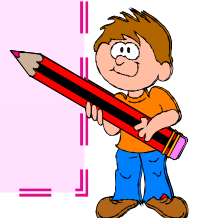
ลงชื่อผู้ตรวจ

เกณฑ์การประเมิน

10	คะแนน	ระดับ 4	ดีเยี่ยม
8-9	คะแนน	ระดับ 3	ดี (ผ่านเกณฑ์)
4-7	คะแนน	ระดับ 2	พอใช้
0-3	คะแนน	ระดับ 1	ปรับปรุง

เอกสารอ้างอิง

- กมล เอกไทยเจริญ. (ม.ป.ป). คณิตศาสตร์ ม.6 เล่ม 5 ค 015. กรุงเทพฯ : เทพเนรมิตการพิมพ์.
- จิระ เจริญสุขวิมล และวินิจ วงศ์รัตนะ. (ม.ป.ป). สรุปหลัก & สูตร คณิตศาสตร์ ม.6 เล่มรวม 5-6. กรุงเทพฯ : เทพเนรมิตการพิมพ์.
- จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. (ม.ป.ป). สูดยอดคำนวณและเทคนิคคิดลัด คณิตศาสตร์ ม.6 ค 015. กรุงเทพฯ : ห้างหุ้นส่วนจำกัด รุ่งเรืองสาส์นการพิมพ์.
- ดำรง ทิพย์โยธา, ยุติ พันธกล้าและณัฐฐาน ไตรภพ. (2547). แคลคูลัส 1. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ธนวัฒน์ (สันติ) สนทราพรพล. (ม.ป.ป). คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 (ม.4-5-6) เล่มที่ 6 สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์อมรรการพิมพ์.
- ราชบัณฑิตยสถาน. (2545). ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน. พิมพ์ครั้งที่ 8. กรุงเทพฯ : ห้างหุ้นส่วนจำกัด อรุณการพิมพ์.
- ลาวัลย์ พลกล้า, สุวรรณ คล้ายกระแสน และพัชรพร เหล่าวานิชย์. (2530). คู่มือครูคณิตศาสตร์ รายวิชา ค014 คณิตศาสตร์ สำหรับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์อักษรเจริญทัศน์.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2555). คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2555). หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.
- อนก หิรัญ. (2540). รวมหลักคณิตศาสตร์ ม.6 (ค 015, ค016). กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.





ภาคผนวก



เฉลยกิจกรรมที่ 4.1



คำชี้แจง

จงหาอนุพันธ์ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. กำหนดให้ $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ จงหา $f''(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}(2x^2 - 3x + 5)$

$$= 4x - 3$$

ดังนั้น $f''(x) = \frac{d}{dx}(4x - 3)$

$$= 4$$

2. กำหนดให้ $f(x) = 5x^6 + 3x + \sqrt{x} - 4$ จงหา $f''(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 5x^6 + 3x + \sqrt{x} - 4$

$$= 5x^6 + 3x + x^{\frac{1}{2}} - 4$$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}(5x^6 + 3x + \sqrt{x} - 4)$

$$= 30x^5 + 3 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

ดังนั้น $f''(x) = \frac{d}{dx}(30x^5 + 3 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})$

$$= 150x^4 - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 150x^4 - \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$



3. กำหนดให้ $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$ จงหา $f''(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$

$$= 2x - x^{-1}$$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}(2x - x^{-1})$

$$= 2 - (-1)x^{-2}$$

$$= 2 + x^{-2}$$

ดังนั้น $f''(x) = \frac{d}{dx}(2 + x^{-2})$

$$= -2x^{-3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

4. กำหนดให้ $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$ จงหา $f'''(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$

$$= x^3 - x^{-3}$$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - x^{-3})$

$$= 3x^2 - (-3)x^{-4}$$

$$= 3x^2 + 3x^{-4}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 + 3x^{-4})$$

$$= 6x + 3(-4)x^{-5}$$

$$= 6x - 12x^{-5}$$

ดังนั้น $f'''(x) = \frac{d}{dx}(6x - 12x^{-5})$

$$= -12(-5)x^{-6}$$

$$= \frac{60}{x^6}$$



5. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt[5]{x} - \frac{3}{x} + 2x^2$ จงหา $f''(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \sqrt[5]{x} - \frac{3}{x} + 2x^2$

$$= x^{\frac{1}{5}} - 3x^{-1} + 2x^2$$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{5}} - 3x^{-1} + 2x^2)$

$$= \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} + 3x^{-2} + 4x$$

ดังนั้น $f''(x) = \frac{d}{dx}(\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} + 3x^{-2} + 4x)$

$$= \frac{1}{5}(-\frac{4}{5})x^{-\frac{9}{5}} + 3(-2)x^{-3} + 4$$

$$= -\frac{4}{25}x^{-\frac{9}{5}} - 6x^{-3} + 4$$

$$= -\frac{4}{25\sqrt[5]{x^9}} - \frac{6}{x^3} + 4$$

6. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x}{x+1}$ จงหา $f''(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{x}{x+1}$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}(\frac{x}{x+1})$

$$= \frac{(x+1)(1) - x(1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x+1-x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= (x+1)^{-2}$$

ดังนั้น $f''(x) = \frac{d}{dx}(x+1)^{-2}$

$$= -2(x+1)^{-3}(1)$$

$$= -\frac{2}{(x+1)^3}$$

7. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ จงหา $f''(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x-3}{2x+1} \right)$

$$= \frac{(2x+1)(1) - (x-3)(2)}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{2x+1-2x+6}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{7}{(2x+1)^2}$$

$$= 7(2x+1)^{-2}$$

ดังนั้น $f''(x) = \frac{d}{dx} (7(2x+1)^{-2})$

$$= 7(-2)(2x+1)^{-3}(2)$$

$$= -28(2x+1)^{-3}$$

$$= -\frac{28}{(2x+1)^3}$$



8. กำหนดให้ $f(x) = \frac{8}{x^5}$ จงหา $f'''(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{8}{x^5}$

$$= 8x^{-5}$$

จะได้ $f'(x) = \frac{d}{dx}(8x^{-5})$

$$= 8(-5)x^{-6}$$

$$= -40x^{-6}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(-40x^{-6})$$

$$= -40(-6)x^{-7}$$

$$= 240x^{-7}$$

ดังนั้น $f'''(x) = \frac{d}{dx}(240x^{-7})$

$$= 240(-7)x^{-8}$$

$$= -1,680x^{-8}$$

$$= -\frac{1,680}{x^8}$$



9. กำหนดให้ $f(x) = (2x+3)^5$ จงหา $f^{(4)}(x)$

วิธีทำ จาก

$$f(x) = (2x+3)^5$$

จะได้

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} ((2x+3)^5) \\ &= (5)(2x+3)^4 (2) \\ &= 10(2x+3)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx} (10(2x+3)^4) \\ &= 10(4)(2x+3)^3 (2) \\ &= 80(2x+3)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{d}{dx} (80(2x+3)^3) \\ &= 80(3)(2x+3)^2 (2) \\ &= 480(2x+3)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= \frac{d}{dx} (480(2x+3)^2) \\ &= 480(2)(2x+3)(2) \\ &= 1,920(2x+3) \\ &= 3,840x + 5,760 \end{aligned}$$



10. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ จงหา $f''(1)$

วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 + 1} \\ &= (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} ((x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (2x) \\ &= x (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx} (x (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}) \\ &= (x) \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} (2x) + (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (1) \\ &= -\frac{x^2}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f''(1) &= -\frac{(1)^2}{((1)^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{((1)^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{1}{(1+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(1+1)^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{1}{(2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.1



คำชี้แจง

ให้นักเรียนเลือกคำตอบทางขวามือ นำมาเติมหน้าข้อต่อไปนี้ให้ถูกต้อง (ข้อละ 1 คะแนน)

F. 1. $f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 2x - 3$

A. $f''(x) = 30x$

H. 2. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 2$

B. $f''(x) = 12x^2 - 12x + 10$

J. 3. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 4$

C. $f''(x) = 6x - 4$

I. 4. $f(x) = x^2 - 2x + 5$

D. $f''(x) = 12x + 4$

G. 5. $f(x) = 7x^3 - 8x^2$

E. $f''(x) = 42x^5 - 2$

B. 6. $f(x) = x^2(x^2 - 2x + 5)$

F. $f''(x) = 30x - 12$

E. 7. $f(x) = x^2(x^5 - 1)$

G. $f''(x) = 42x - 16$

C. 8. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$

H. $f''(x) = 36x^2 - 10$

D. 9. $f(x) = 2x(x^2 + x + 1)$

I. $f''(x) = 2$

A. 10. $f(x) = \frac{5x^5 + 2x^3 - 7x^2}{x^2}$

J. $f''(x) = 12x^2 - 12x + 2$



เฉลยแบบฝึกทักษะที่ 4.2



คำชี้แจง

จงหาอนุพันธ์ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. กำหนดให้ $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 6x + 9$ จงหาอนุพันธ์อันดับสูง
ทั้งหมดของ f

วิธีทำ จาก $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 6x + 9$

จะได้ $f'(x) = 10x^4 - 12x^3 + 15x^2 - 14x - 6$

$$f''(x) = 40x^3 - 36x^2 + 30x - 14$$

$$f'''(x) = 120x^2 - 72x + 30$$

$$f^{(4)}(x) = 240x - 72$$

$$f^{(5)}(x) = 240$$

$$f^{(6)}(x) = 0$$

$$f^{(7)}(x) = 0$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = 0$$

ดังนั้น $f^{(n)}(x) = 0$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 6$



2. กำหนดให้ $f(x) = (x-1)^3(x+2)^4$ จงหา $f''(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = (x-1)^3(x+2)^4$
จะได้ $f'(x) = (x-1)^3(4)(x+2)^3(1) + (x+2)^4(3)(x-1)^2(1)$

$$= 4(x-1)^3(x+2)^3 + 3(x+2)^4(x-1)^2$$

$$= (x-1)^2(x+2)^3[4(x-1) + 3(x+2)]$$

$$= (x^2 - 2x + 1)(x+2)^3(7x+2)$$

$$= (7x^3 - 12x^2 + 3x + 2)(x+2)^3$$

ดังนั้น $f''(x) = (7x^3 - 12x^2 + 3x + 2)(3)(x+2)^2(1) + (x+2)^3(21x^2 - 24x + 3)$

$$= (x+2)^2[(21x^3 - 36x^2 + 9x + 6) + (x+2)(21x^2 - 24x + 3)]$$

$$= (x+2)^2[21x^3 - 36x^2 + 9x + 6 + 21x^3 + 18x^2 - 45x + 6]$$

$$= (x+2)^2(42x^3 - 18x^2 - 36x + 12)$$

3. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}}$ จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$

วิธีทำ จาก $f(x) = y = \frac{1}{2x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-2} + 4x^{-\frac{1}{2}}$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(-2)x^{-3} + 4(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}}$

$$= -x^{-3} - 2x^{-\frac{3}{2}}$$

ดังนั้น $\frac{d^2y}{dx^2} = -(-3)x^{-4} - 2(-\frac{3}{2})x^{-\frac{5}{2}}$

$$= \frac{3}{x^4} + \frac{3}{x^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{3}{x^4} + \frac{3}{x^2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3\sqrt{x} + 3x^2}{x^4\sqrt{x}}$$

4. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x$ จงหา $f^{(4)}(a)$ เมื่อ $a = -\frac{1}{2}$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x$

จะได้ $f'(x) = \frac{1}{2}(4)x^3 - \frac{3}{2}(2)x - 1$
 $= 2x^3 - 3x - 1$

$f''(x) = 6x^2 - 3$

$f'''(x) = 12x$

$f^{(4)}(x) = 12$

ดังนั้น $f^{(4)}(-\frac{1}{2}) = 12$

5. กำหนดให้ $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ จงหา $f'''(a)$ เมื่อ $a = 1$

วิธีทำ จาก $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$

จะได้ $f'(x) = 2(\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}} - (\frac{3}{2})x^{\frac{1}{2}} + 2(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}}$
 $= x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}$

$f''(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}} - (-\frac{3}{2})x^{-\frac{5}{2}}$
 $= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

นั่นคือ $f'''(x) = -\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})x^{-\frac{5}{2}} - \frac{3}{4}(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}(-\frac{5}{2})x^{-\frac{7}{2}}$
 $= \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} + \frac{3}{8}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{15}{4}x^{-\frac{7}{2}}$

$= \frac{3}{4\sqrt{x^5}} + \frac{3}{8\sqrt{x^3}} - \frac{15}{4\sqrt{x^7}}$

ดังนั้น $f'''(1) = \frac{3}{4(1)} + \frac{3}{8(1)} - \frac{15}{4(1)}$
 $= -\frac{21}{8}$

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

	ข้อที่	เฉลย	ข้อที่	เฉลย
	1.	ข.	6.	ก.
	2.	ค.	7.	ง.
	3.	ค.	8.	ค.
	4.	ง.	9.	ข.
	5.	ข.	10.	ค.





ชื่อ - นามสกุล ชั้น เลขที่

รายการ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	ผลการประเมิน
ใบกิจกรรมที่ 4.1	20		
แบบฝึกทักษะที่ 4.1	10		
แบบฝึกทักษะที่ 4.2	10		
รวม	40		

รายการ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	ผลการประเมิน
คะแนนทดสอบหลังเรียน	10		

เกณฑ์การประเมิน

ในแต่ละแบบฝึกเสริมทักษะ นักเรียนจะต้องทำแบบฝึกได้ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 80

- ⇒ ใบกิจกรรมที่ 4.1 ทำถูกไม่น้อยกว่า 16 คะแนน
- ⇒ แบบฝึกทักษะที่ 4.1 ทำถูกไม่น้อยกว่า 8 คะแนน
- ⇒ แบบฝึกทักษะที่ 4.2 ทำถูกไม่น้อยกว่า 8 คะแนน

ในแบบทดสอบหลังเรียน นักเรียนจะต้องทำแบบทดสอบได้ถูกต้องไม่น้อยกว่าร้อยละ 80

- ⇒ แบบทดสอบหลังเรียน ทำถูกไม่น้อยกว่า 8 ข้อ

สรุปผลการประเมิน



ผ่านเกณฑ์การประเมิน



ไม่ผ่านเกณฑ์การประเมิน



