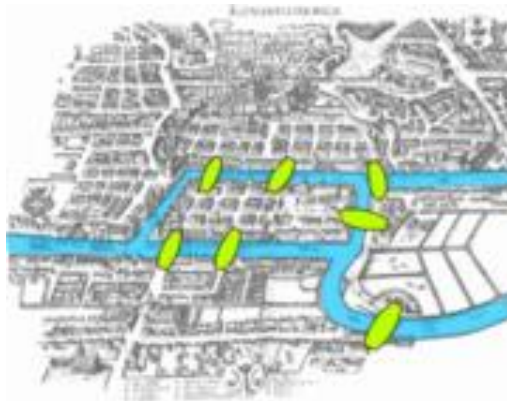


# ชุดการเรียนรู้การสอนคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

## ชุดที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ



พัฒนาโดย

นางสาววารภรณ์ เสาวะพาน

ตำแหน่งครู วิทยฐานะชำนาญการ

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

โรงเรียนคำเขื่อนแก้วชนูปถัมภ์ อำเภอคำเขื่อนแก้ว จังหวัดยโสธร

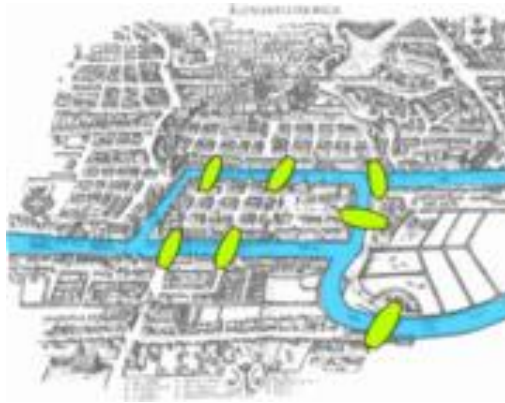
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 28

## ใบความรู้ที่ 1.1 : เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับกราฟ

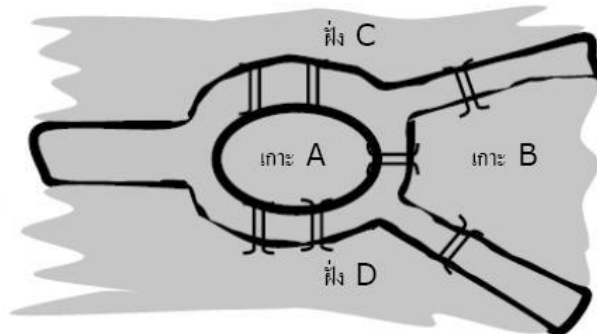


### บทนำ

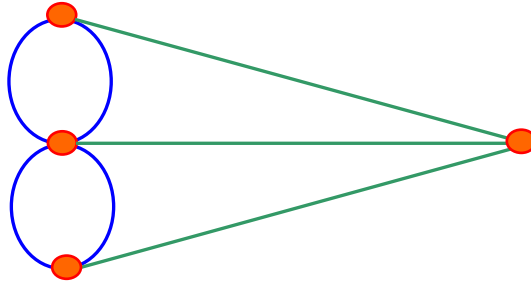
**ทฤษฎีกราฟ** (graph theory) เริ่มต้นจากความพยายามในการตอบปัญหาปริศนา (puzzle) ต่าง ๆ ปัญหาหนึ่งที่รู้จักกันดีสำหรับผู้ศึกษาคณิตศาสตร์ คือ ปัญหาสะพานคอนิกส์เบิร์ก (Konigsberg Bridge Problem) ก่อนสงครามโลกครั้งที่สอง เมืองคาลินินกราด (Kaliningrad) ในประเทศที่แต่เดิมคือ สหภาพโซเวียตนั้น มีชื่อเก่าว่า เมืองคอนิกส์เบิร์ก ซึ่งเมืองนี้มีแม่น้ำพรีเกล (Pregel River) ไหลผ่าน ปัญหาที่มีอยู่ว่ามีเกาะ 2 เกาะ อยู่กลางแม่น้ำ มีสะพาน 7 สะพาน ที่เชื่อมระหว่างเกาะกับแผ่นดิน ซึ่งจัดไว้สำหรับเป็นที่พักผ่อนของชาวเมืองในวันอาทิตย์ดังรูป



ตอนต้น ค.ศ. 1700 ชาวเมืองนี้ได้พยายามแก้ปริศนาซึ่งปัจจุบันจัดให้เป็นปัญหาหนึ่งในปัญหาที่เก่าแก่ที่สุดที่เกี่ยวข้องกับกราฟ **ปัญหามีอยู่ว่า** เป็นไปได้หรือไม่ที่ชาวเมืองคอนิกส์เบิร์ก คนหนึ่งจะเริ่มต้นเดินทางจากเกาะหรือฝั่งใดฝั่งหนึ่งโดยผ่านทุกเกาะและทุกฝั่ง และจะเดินข้ามสะพานทั้ง 7 สะพานเพียงครั้งเดียวโดยไม่ซ้ำกันและกลับมาที่จุดเริ่มต้นใหม่ ดังรูป



ปัญหานี้ไม่มีใครสามารถตอบได้จนกระทั่งปี ค.ศ. 1736 เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (Leonard Euler) ได้ตีพิมพ์บทความตอบปริศนาที่ว่า**เป็นไปได้**ที่จะหาเส้นทางดังกล่าว ออยเลอร์แก้ปัญหานี้โดยการจำลองปัญหาให้เห็นจริง โดยกำหนดจุดขึ้นมาแทนบริเวณพื้นดินทั้ง 4 แห่ง และกำหนด เส้นเชื่อมแทนสะพานทั้ง 7 สะพาน เส้นเชื่อมเหล่านี้เชื่อมโยงจุดที่ตั้งในแผนภาพ การกำหนดจุดและเส้นเชื่อมขึ้นมาทำให้เกิด“กราฟ” (graph) ขึ้น กราฟที่ออยเลอร์กำหนดขึ้นมาแสดงไว้ ดังรูป



แผนภาพจำลองของออยเลอร์

แนวทางการตอบปัญหานี้ของ ออยเลอร์ คือการดูจากแผนภาพจำลองข้างต้น เขาพบว่า การเริ่มต้นเดินที่จุดใดจุดหนึ่งในกราฟแล้วเดินผ่านเส้นเชื่อมทุกเส้นเพียงครั้งเดียวแล้วกลับมายังจุดเริ่มต้นได้นั้น เป็นไปได้ก็ต่อเมื่อจำนวนเส้นเชื่อมที่ออกจากจุดแต่ละจุดในกราฟต้องเป็นจำนวนคู่เท่านั้น



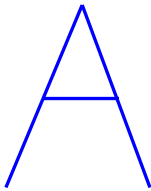
**ลากเส้นกันเถอะ**

ชื่อ - นามสกุล / กลุ่ม..... ชั้น ม.5/..... เลขที่ .....

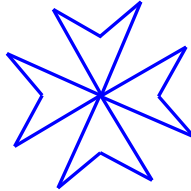
**คำชี้แจง** ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้ พร้อมกับนำเสนอผลงานเป็นกลุ่ม

1. พิจารณารูปต่อไปนี้ว่าสามารถเขียนโดยไม่ต้องยกดินสอและไม่ลากซ้ำเส้นเดิมได้หรือไม่  
ถ้าได้ให้เขียนลูกศรกำกับเส้นเชื่อมแต่ละเส้นเพื่อแสดงแนวทางการลากดินสอ

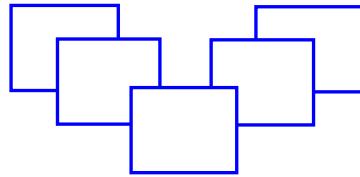
A



B



C



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

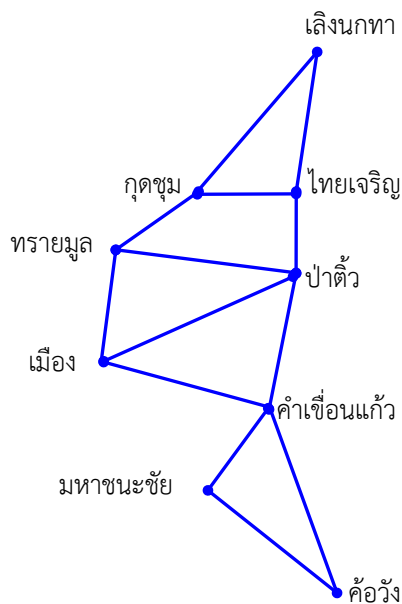
## การเขียนแผนภาพจำลองแทนกราฟ

ในบทนี้เราจะศึกษาแผนภาพที่เรียกว่า **กราฟ (graph)** เป็นแผนภาพที่ประกอบด้วยจุดและเส้นที่เชื่อมระหว่างจุด เพื่อแทนโครงสร้าง ปัญหาหรือจำลองสภาพบางอย่าง เพื่อให้เข้าใจแนวความคิดเกี่ยวกับกราฟ เราจะเริ่มต้นด้วยการพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ในจังหวัดยโสธรมีอำเภออยู่ 9 อำเภอ แต่ละอำเภอมีถนนเชื่อมระหว่างอำเภอดังนี้



**วิธีทำ** เราสามารถสร้างแบบจำลองแทนสถานการณ์นี้ โดยให้จุดแทนอำเภอต่าง ๆ ทั้ง 9 อำเภอ และเส้นเชื่อมระหว่างจุด 2 จุด แทนอำเภอมีถนนต่อกัน ดังนั้นแบบจำลองที่แทนสถานการณ์นี้สามารถเขียนได้ดังรูป

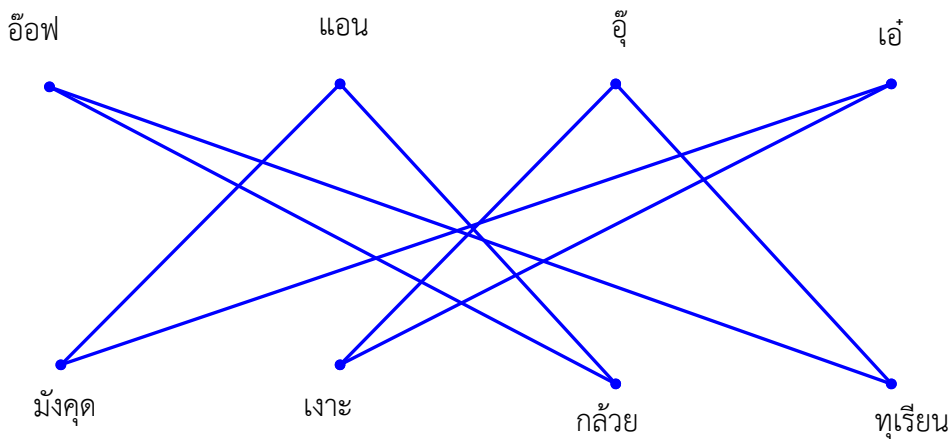


**ตัวอย่างที่ 2** สมมุติว่าเรามีตะกร้าผลไม้ใบหนึ่ง ซึ่งมีทุเรียน เงาะ กัล้วย และมังคุด อย่างละหนึ่งผล และมีเด็กอยู่ 4 คน คือ อีฟ แอน อู๋ และ เอ เราทราบว่า



อีฟชอบกินกัล้วยและทุเรียน แอนชอบกินมังคุดและกัล้วย  
อู๋ชอบกินเงาะและทุเรียน เอชอบกินมังคุดและเงาะ  
อยากทราบว่าควรจะแจกผลไม้ให้เด็กทั้ง 4 คน อย่างไร  
โดยที่เด็กแต่ละคนได้ผลไม้ที่ตนเองชอบ

**วิธีทำ** เราสามารถสร้างแบบจำลองแทนสถานการณ์นี้ โดยให้  
จุด ซึ่งแบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ 1 แทน คน และกลุ่มที่ 2 แทน ผลไม้  
เส้นเชื่อมระหว่างจุดสองจุดใด แทน ความสัมพันธ์ระหว่างคนกับผลไม้ที่ชอบกิน  
ดังนั้นแบบจำลองที่แทนสถานการณ์นี้สามารถเขียนได้ดังรูป



จากแบบจำลอง เราอาจแจกผลไม้ให้เด็กได้ดังนี้

อีฟ	ได้	กัล้วย	หรือ	อีฟ	ได้	ทุเรียน
แอน	ได้	มังคุด	”	แอน	ได้	กัล้วย
อู๋	ได้	ทุเรียน	”	อู๋	ได้	เงาะ
เอ	ได้	เงาะ	”	เอ	ได้	มังคุด

จากตัวอย่างทั้งสามข้างต้น จะเห็นว่า เราใช้แผนภาพซึ่งประกอบด้วยจุดและเส้น เพื่อช่วยให้การ  
แก้ปัญหาสะดวกยิ่งขึ้น แผนภาพในลักษณะนี้เรียกว่า **กราฟ (graph)**









## ใบความรู้ที่ 1.2 : เรื่อง กราฟ

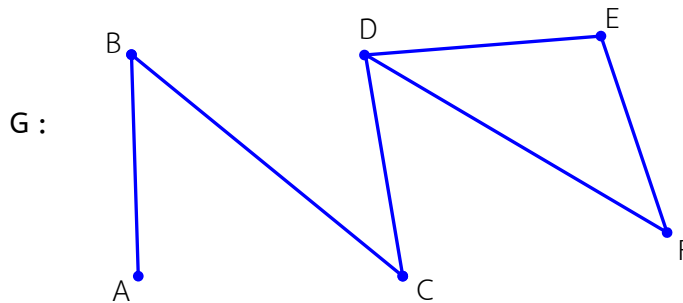


### กราฟ (graph)

**บทนิยาม** กราฟ  $G$  ประกอบด้วยเซตจำกัด 2 เซต คือ

1. เซตที่ไม่เป็นเซตว่างของจุดยอด (vertex) แทนด้วยสัญลักษณ์  $V(G)$
2. เซตของเส้นเชื่อม (edge) ที่เชื่อมระหว่างจุดยอดแทนด้วยสัญลักษณ์  $E(G)$

**ตัวอย่างที่ 3** จากกราฟ  $G$  ที่กำหนดให้ จงหา  $V(G)$  และ  $E(G)$

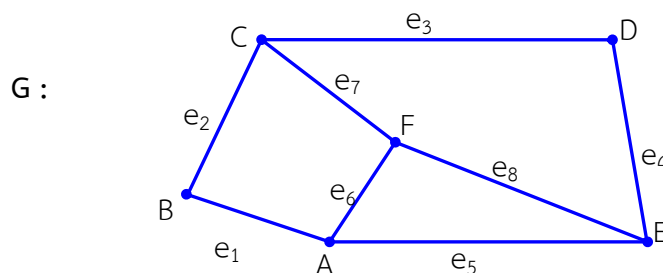


**วิธีทำ** จากกราฟ  $G$  จะได้ว่า

$$V(G) = \{ A, B, C, D, E, F \}$$

$$E(G) = \{ AB, BC, CD, DE, DF, EF \}$$

**ตัวอย่างที่ 4** จากกราฟ  $G$  ที่กำหนดให้ จงหา  $V(G)$  และ  $E(G)$



จากกราฟ  $G$  จะได้ว่า  $V(G) = \{ A, B, C, D, E, F \}$

$$E(G) = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 \}$$

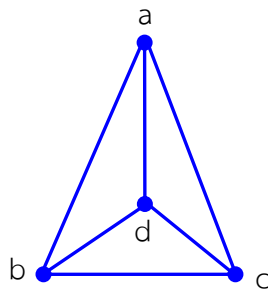
**ตัวอย่างที่ 5** กำหนดกราฟ  $G$  เมื่อ

$$V(G) = \{ a, b, c, d \}$$

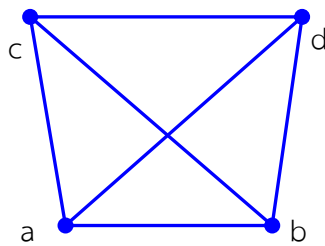
$$E(G) = \{ ab, ac, ad, bc, bd, cd \}$$

จงเขียนกราฟ จากเซตของจุดยอดและเส้นเชื่อมที่กำหนดให้

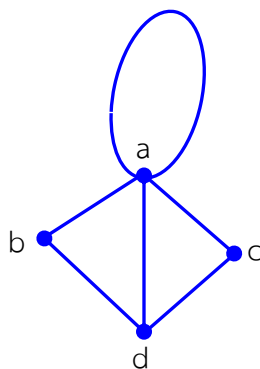
**วิธีทำ** เขียนเป็นกราฟ ได้ 3 แบบ ดังรูป (1) – (3)



(1)



(2)



(3)



### กราฟ

ชื่อ - นามสกุล / กลุ่ม..... ชั้น ม.5/..... เลขที่ .....

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้ พร้อมกับนำเสนอผลงานเป็นกลุ่ม

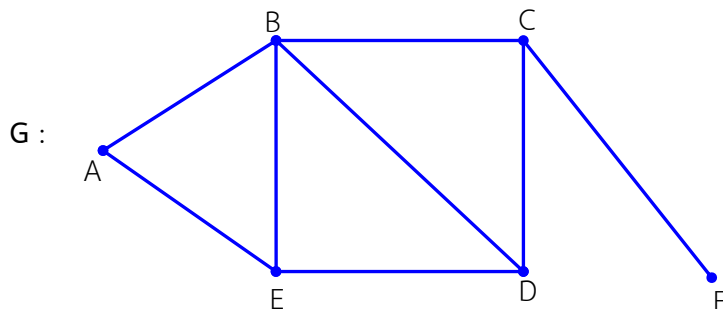
1. กำหนดกราฟ  $G$  โดยที่

$$V(G) = \{a, b, c, d, x, y, z\}$$

$$E(G) = \{ax, by, cz, ab, ac, az\}$$

จงเขียนกราฟ  $G$

2. กำหนดกราฟ  $G$  ดังรูป จงหา  $V(G)$  และ  $E(G)$



.....

.....

.....

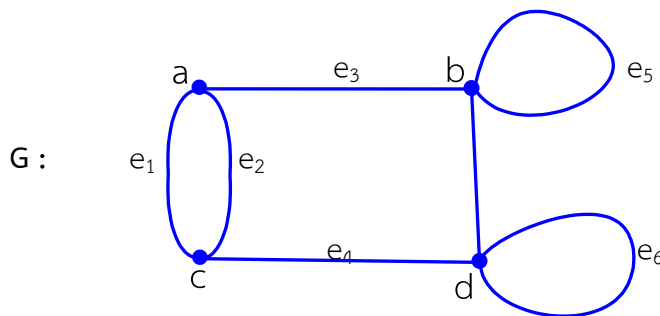
ใบความรู้ที่ 1.3 : เรื่อง เส้นเชื่อมขนานและวงวน



เส้นเชื่อมขนานและวงวน (Parallel edges and Loop)

บทนิยาม เส้นเชื่อมตั้งแต่ 2 เส้น ที่เชื่อมระหว่างจุดยอดคู่เดียวกันเรียกว่า  
เส้นเชื่อมขนาน (parallel edges)  
เส้นเชื่อมที่เชื่อมจุดยอดเพียงจุดเดียวเรียกว่า วงวน (loop)

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดกราฟ G ดังรูป



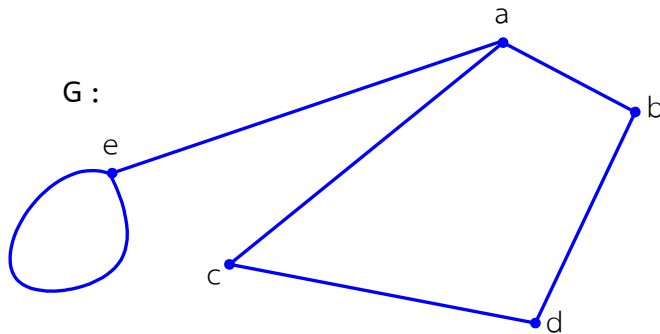
วิธีทำ จากรูปจะเห็นว่า เส้นเชื่อม  $e_1$  และ  $e_2$  เป็นเส้นเชื่อมขนาน  
เส้นเชื่อม  $e_5$  และ  $e_6$  เป็นวงวน

จุดยอดประชิด และเส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอดใด ๆ ของกราฟ

บทนิยาม จุดยอด  $u$  และ จุดยอด  $v$  ของกราฟเป็น จุดยอดประชิด (adjacent vertices) ก็ต่อเมื่อมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดทั้งสองเส้นเชื่อม  $e$  ของกราฟเกิดกับ (incident) จุดยอด  $v$  ถ้าจุดยอด  $v$  เป็นจุดปลายจุดหนึ่งของเส้นเชื่อม  $e$

**ตัวอย่างที่ 7** กำหนดกราฟ  $G$  ดังรูป

จงหา จุดยอดประชิดและ เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด  $a, b, c, d$  และ  $e$



**วิธีทำ** จากรูปจะได้ว่า

1. จุดยอด  $a$  และจุดยอด  $b$  เป็นจุดยอดประชิด
2. จุดยอด  $a$  และจุดยอด  $e$  เป็นจุดยอดประชิด
3. จุดยอด  $b$  และจุดยอด  $c$  เป็นจุดยอดประชิด
4. จุดยอด  $c$  และจุดยอด  $d$  เป็นจุดยอดประชิด
5. จุดยอด  $c$  และจุดยอด  $e$  เป็นจุดยอดประชิด

และจะเห็นว่า

1. เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด  $a$  คือ  $ab, ac$  และ  $ae$
2. เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด  $b$  คือ  $ba$  และ  $bd$
3. เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด  $c$  คือ  $ca$  และ  $cd$
4. เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด  $d$  คือ  $dc$  และ  $db$
5. เส้นเชื่อมที่เกิดกับจุดยอด  $e$  คือ  $ea$

**ใบกิจกรรมที่ 1/4**

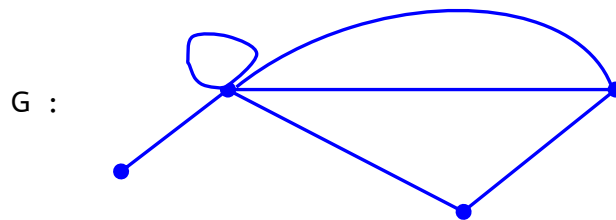
**รู้จริงปะ**

ชื่อ - นามสกุล / กลุ่ม..... ชั้น ม.5/..... เลขที่ .....

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่กำหนดให้ พร้อมกับนำเสนอผลงานเป็นกลุ่ม

**โจทย์** กำหนดกราฟ  $G$  ดังรูป จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด ถ้าถูกให้เขียน ✓

ถ้าผิดให้เขียน ✗ ลงในช่องเครื่องหมาย ถ้าข้อความใดผิดขอให้แก้ไขข้อความนั้นให้ถูกต้อง



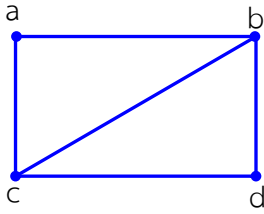
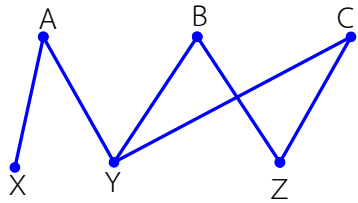
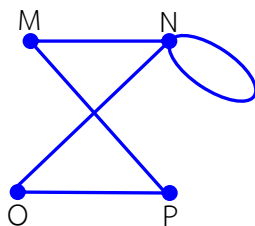
ข้อความ	เครื่องหมาย	ข้อความใหม่ที่ถูกต้อง
1. $e_1$ เป็นเส้นเชื่อมขนาน		
2. เส้นเชื่อมทั้งหมดที่เกิดกับจุดยอด $b$ คือ $e_2, e_6$		
3. จุดยอด $c$ และจุดยอด $d$ ไม่เป็นจุดยอดประชิด		
4. $e_1, e_2$ และ $e_3$ เป็นเส้นเชื่อมขนาน		

**แบบฝึกหัดที่ 1.2**

ชื่อ - นามสกุล ..... ชั้น ม.5/..... เลขที่ .....

**คำชี้แจง** ให้นักเรียนแสดงวิธีทำ / หาคำตอบที่ถูกต้อง ลงในช่องว่างที่กำหนดให้แต่ละข้อ

1. จงเขียน  $V(G)$  และ  $E(G)$  จากแผนภาพกราฟในแต่ละข้อต่อไปนี้

ข้อ	กราฟ G	$V(G)$	$E(G)$
1		<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
2		<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
3		<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>



2. จงเขียนแผนภาพของกราฟ G เมื่อกำหนด  $V(G)$  และ  $E(G)$  ในแต่ละข้อดังต่อไปนี้

2.1  $V(G) = \{ U, V, X, Y \}$  ,  $E(G) = \{ VX , XU , VY \}$

2.2  $V(G) = \{ a, b, c \}$  ,  $E(G) = \emptyset$

2.3  $V(G) = \{ \text{ไทย, ลาว, พม่า, มาเลเซีย, กัมพูชา} \}$

$E(G) = \{ \text{ไทยลาว, ไทยพม่า, ไทยมาเลเซีย, ไทยกัมพูชา, พม่าลาว, ลาวกัมพูชา} \}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. ที่จอดรถในโรงเรียนคำเขื่อนแก้วชนูปถัมภ์ มีรถที่จอดประจำ 6 คัน ในช่วงเวลา ดังนี้  
คันที่ 1 จอดเฉพาะช่วงเวลา 07.00 - 15.00 น.    คันที่ 2 จอดเฉพาะช่วงเวลา 12.00 - 21.00 น.  
คันที่ 3 จอดเฉพาะช่วงเวลา 09.00 - 13.00 น.    คันที่ 4 จอดเฉพาะช่วงเวลา 16.00 - 24.00 น.  
คันที่ 5 จอดเฉพาะช่วงเวลา 08.00 - 18.00 น.    คันที่ 6 จอดเฉพาะช่วงเวลา 22.00 - 08.00 น.

3.1 จงจำลองปัญหานี้ด้วยกราฟ โดยให้จุดยอดแทนรถแต่ละคัน และจุดยอด 2 จุดมีเส้นเชื่อมก็ต่อเมื่อ รถที่แทนด้วยจุดยอดทั้งสองมีช่วงเวลาจอดรถซ้อนกัน

3.2 จากกราฟที่ได้ จงหาว่าที่จอดรถแห่งนี้ ต้องเตรียมพื้นที่จอดรถไว้อย่างน้อยที่สุดสำหรับรถกี่คัน เนื้อที่ทุกคันจะสามารถจอดได้ ณ ขณะเวลาใด ๆ

.....

.....

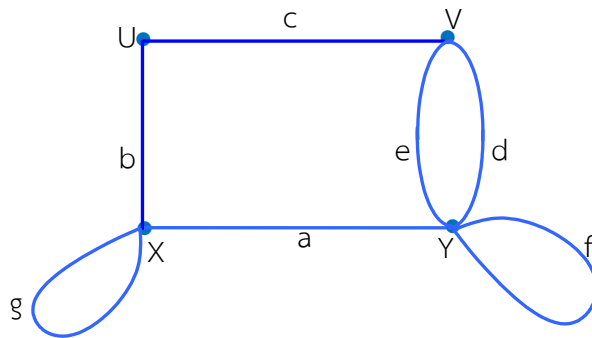
.....

.....

.....

.....

4. กำหนดกราฟดังรูป จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ **ถูก** หรือ **ผิด**



- ..... 1. จุดยอด U และจุดยอด X เป็นจุดยอดประชิด
- ..... 2. จุดยอด V และจุดยอด X เป็นจุดยอดประชิด
- ..... 3. จุดยอด V และจุดยอด Y เป็นจุดยอดประชิด
- ..... 4. เส้นเชื่อม a และ c เป็นเส้นเชื่อมขนาน
- ..... 5. เส้นเชื่อม d และ e เป็นเส้นเชื่อมขนาน
- ..... 6. เส้นเชื่อม f และ g เป็นเส้นเชื่อมขนาน
- ..... 7. เส้นเชื่อม f และ g เรียกว่า วงวน
- ..... 8. เส้นเชื่อม d และ e เรียกว่า วงวน
- ..... 9. เส้นเชื่อม a เกิดกับจุดยอด Y
- ..... 10. เส้นเชื่อม c เกิดกับจุดยอด V

