ความพิศวงของตัวเลข จำนวนเฉพาะตอนที่ 1

นำเสนอเมื่อ : 4 ก.ค. 2551

เคยคิดไหมครับว่า เวลาเราเรียนเลขเรื่องตัวประกอบนั้น เราจะเรียนเรื่องจำนวนเฉพาะไปทำไม
เคยคิดไหมครับว่า
ทำไมเราสามารถส่งเบอร์บัตรเครดิตไปในทางอินเตอร์เน็ตได้ ในขณะที่ยังมีชาวบ้านใช้อินเตอร์เน็ตอยู่ด้วย
หรือว่าโทรศัพท์ที่สัญญาณมันรู้ได้ไงว่าเราต้องการคุยกับคนนี้
คำตอบอยู่ที่จำนวนเฉพาะนี่แหละครับ
จำนวนเฉพาะหรือภาษาอังกฤษที่เรียกกันว่า prime number นั้น
เป็นที่ศึกษากันอย่างแพรหลายของนักคณิตศาสตร์มากมายมาเป็นร้อยปีแล้ว
แล้วจำนวนเฉพาะคืออะไร
จำนวนเฉพาะก็คือจำนวนนับที่มีแค่สองตัวเท่านั้นที่หารมันลงตัว คือ 1 และตัวมันเอง
แล้วอย่างนี้หนึ่งถือเป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่
คำตอบคือไม่ครับ เพราะ (ตอบแบบกำปั้นทุบดิน) ก็มันมีจำนวนนับแค่ตัวเดียวไง แต่จริงๆแล้วที่เขาไม่นับว่า 1
เป็นจำนวนเฉพาะนั้นมีหลายสาเหตุด้วยกัน แต่สาเหตุหลักๆก็คือ 1 นั้นเป็นเลขพิเศษ (เป็นเอกลักษณ์การคูณ)
รวมไปถึงในการแยกตัวประกอบนั้น
เราต้องการแยกตัวประกอบของจำนวนใดๆ ให้เป็นรูปของการคูณของตัวเลขที่น้อยกว่าจำนวนนั้น เช่น 2=1x2 แต่
1 นั้นมันไม่มีนี่ครับ (แต่ตอนนี้นักคณิตศาสตร์บางคนก็บอกว่า 1 นั้นเป็นจำนวนเฉพาะเหมือนกัน)

แล้วจำนวนเฉพาะนั้นมีมาตั้งแต่เมื่อไร
ว่ากันว่ามีมาตั้งแต่สมัยอียิปต์โบราณแล้วครับ ดังนั้นมีมาเป็นพันปีแล้วครับ แต่คนแรกที่พูดถึงจำนวนเฉพาะ ก็คือ
ยูคลิด (Euclid) นักปรัชญาชาวกรีกโบราณ (ซึ่งก็เป็นพันปีอีกเหมือนกัน) ยูคลิดนั้นเขียนหนังสือที่ชื่อว่า The
Elements หนังสือเรื่อง The Elements นั้นมีถึง 13 เล่มด้วยกัน
และเป็นหนังสือพิมพ์มากที่สุดอันดับสองทั่วโลกเลยนะครับ
จะเป็นรองก็เป็นเพียงแต่ไบเบิลเท่านั้น
จำนวนเฉพาะที่ใหญ่ที่สุดและเล็กที่สุด
จำนวนเฉพาะที่เล็กที่สุดนั้นง่ายใช่ไหมครับ เพราะว่ามันคือ 2 แต่ถ้านับ 1
ว่าเป็นจำนวนเฉพาะตามที่นักคณิตศาสตร์บางคนบอกว่าใช่ ก็หนึ่งแหละครับ
แต่ใหญ่ที่สุดหละ คำตอบคือมันยังหาไม่ได้ครับ
ก็เพราะในหนังสือเรื่อง The Elements ของยูคลิดนะสิครับ ทำพิษ
เพราะยูคลิดพิสูจน์ให้เห็นว่า ถ้าเราเจอจำนวนเฉพาะใหญ่มากตัวหนึ่ง แต่หาไปอีกหน่อยเราก็จะเจอที่ใหญ่กว่านั้นอีก
เท่าที่คนหาได้ในตอนนี้ จำนวนเฉพาะที่ใหญ่ที่สุดนั้นคือ $2^{32,582,657} - 1$ หาเจอเมื่อ 11 เดือนกันยายน ปี 2006
นี้เองครับโดย Great Internet Mersenne Prime Search
ในนี้มีคำอยู่คำหนึ่งที่ชื่อว่า Mersenne Prime, Mersenne Prime นั้นเป็นวิธีการหาจำนวนเฉพาะวิธีหนึ่งครับ
จากสมการ
$M_n=2^n-1$
M_n นั้นจะเป็นจำนวนเฉพาะ ถ้า n เป็นจำนวนเฉพาะครับ แต่จริงๆแล้ววิธีนี้
ก็ไม่ใช่จะหาจำนวนเฉพาะได้ทุกตัวหรอกนะครับ เพราะว่า ลองแทน n=11,
$M_{11}=2^{11}-1 =2047$
แต่ 2047 มันหารได้ด้วย 23 กับ 89 ลงตัว
วิธีการตรวจดูว่าตัวเลขไหนที่เป็นจำนวนเฉพาะ
แล้วมีวิธีไหนที่เราจะรู้ได้ว่าตัวเลขนั้น เช่น N เป็นจำนวนเฉพาะ
วิธีแรกก็คือ ก็ลองหารดูสิครับหารตั้งแต่ 1 ถึงตัวมันเลย ก็คือ N วิธีนี้ดูเหนื่อยใช่ไหมครับ งั้นก็เอาใหม่

ก็ลองหารด้วย 1 ถึง sqrt(n) ก็ลดลงได้เยอะ แต่ก็ยังช้าอยู่ดีใช่ไหมครับ
งั้นคราวนี้มาลองวิธีฉลาดๆดูบ้าง
วิธีฉลาดๆเช่น Fermat's little theorem
Fermat นั้นเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสครับ แต่จะบอกว่าเป็นนักคณิตศาสตร์ก็ไม่เชิง เพราะว่า Fermat นั้นหากินทางกฎหมายครับ แค่คิดเลขเป็นงานอดิเรกเท่านั้น
Fermat's little theorem บอกว่า
ถ้า a เป็นจำนวนนับใดๆ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ
a^{p-1} หารด้วย p ซะ แล้วถ้าได้เศษ 1 แล้วละก็ p ก็เป็นจำนวนเฉพาะ
แต่แหม มันก็ดูยากนะครับ เพราะเราต้องหาว่า a ตัวไหน ที่จะทำให้ข้อความข้างบนเป็นจริง ดูแล้วก็เหนื่อย
มาดูอีกวิธีที่ฉลาดๆกันดูบ้างครับ (แต่วิธีนี้นั้นไม่ได้แน่นอนเสมอ)
เห็นคำว่า Mersenne prime ที่ตอนต้นไหมครับ $M_n=2^n-1$
ถ้าเราเอา ก็เอา M_n มาหารด้วย n ซะ ถ้าเหลือเศษหนึ่ง ก็อุบอิบก่อน แต่ถ้าไม่ใช่หนึ่ง M_n ก็ตัวประกอบแน่นอนครับ
แต่ถ้าเป็นหนึ่ง ก็ฮาๆๆๆๆๆๆๆๆๆๆๆๆ M_n อาจจะเป็นจำนวนเฉพาะก็ได้ หรืออาจจะไม่ใช่ก็ได้
(เพียงแต่ว่ามีแนวโน้มที่จะเป็นจำนวนเฉพาะมากกว่าเท่านั้นเอง)
ลักษณะของจำนวนเฉพาะนั้นมีมากมายครับ เช่น
Wilson's theorem ที่บอกว่า จำนวนเต็ม p>1 เป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ (p-1)!+1 หารด้วย p ลงตัว
Bertrand's postulate ที่บอกว่า ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 แล้ว จะมีจำนวนเฉพาะหนึ่งตัว p ที่ $n<p<2n$
ทั้งหมดเป็นเรื่องเกี่ยวกับจำนวนเฉพาะที่นักคณิตศาสตร์นั้นศึกษากันมาเป็นพันๆปีเลยนะครับเนี่ย
ตอนหน้าเราจะมาดูกันว่า แล้วจำนวนเฉพาะนั้นสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับอะไรกันได้บ้าง
ตอนนี้เอาแค่ปูพื้นฐานก่อนนะครับ ตอนหน้า เรามาดูกันว่า
แล้วทำไมเราถึงส่งเบอร์บัตรเครดิตออกไปซื้อของออนไลน์กันได้ครับ

อ้างอิง

du Sautoy, M. *The Music of the Primes: Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics*. HarperCollins 2004 (มีเว็บไซท์ที่http://www.musicoftheprimes.com/)
Derbysrine, J. Prime Obssession, John Henry Press. Washington DC. 2003
Devlin, K. The language of mathematics, W. H. Freeman and Company, NY. 1998
http://en.wikipedia.org/wiki/Prime_number#There_are_infinitely_many_prime_numbers
ที่มา http://gotoknow.org/blog/mathbeauty/93000