

ชุดกิจกรรมเกมฝึกทักษะคณิตศาสตร์

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน :

ชุดที่ 1

การสร้างจำนวนเชิงซ้อนและสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32202

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

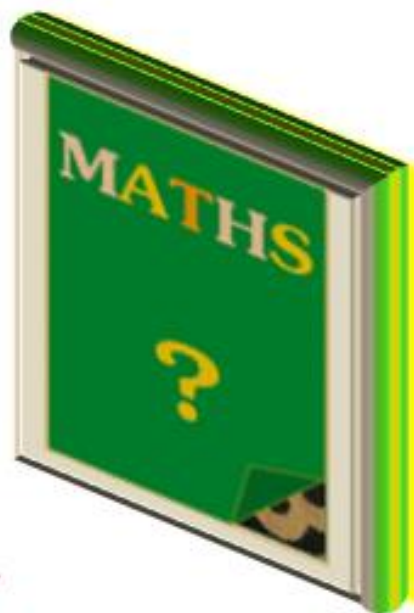


$z = x + yi$ $z\bar{z}$

$2 + \sqrt{3}i$ (a, b)

$\text{Im}(z)$ $x^2 = -1$

i^n $|z|$



$3i$ $r(\cos A + i \sin A)$

$a^2 + b^2$ $\sqrt{-1}$

$(a + bi)(a - bi)$

$\text{Re}(z)$

นางสาวสมิตรา อัดโตดดร

ครูชำนาญการ



โรงเรียนเทพศิรินทร์ สมุทรปราการ

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 6



คำนำ

ชุดกิจกรรมเกมฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชุดที่ 1 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน : การสร้างจำนวนเชิงซ้อนและสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน ฉบับนี้ เป็นหนึ่งในชุดกิจกรรมเกมฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ที่ใช้ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32202 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งเป็นชุดกิจกรรมที่มุ่งเน้นให้นักเรียนเข้าใจ ในหลักการ ทฤษฎีบท กฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ และส่งเสริมทักษะการคิด เพื่อพัฒนาความรู้ ทักษะ และกระบวนการในการทำโจทย์คณิตศาสตร์ ในรูปแบบเกมภาพปริศนาคณิตศาสตร์ เพื่อให้ให้นักเรียนมีความสนุกสนาน เพลิดเพลิน เกิดเจตคติที่ดีต่อ วิชาคณิตศาสตร์

ชุดกิจกรรมเกมฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชุดที่ 1 นี้ เป็นเกมภาพปริศนาที่ส่งเสริมองค์ความรู้ และทักษะการคิดเกี่ยวกับการสร้างจำนวนเชิงซ้อนและสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน โดยผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่า จะเป็นประโยชน์แก่ผู้เรียน และผู้สนใจศึกษา เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาคณิตศาสตร์ชั้นสูงต่อไป

สุมิตรา อัดโดดดร

สารบัญ

	หน้า
คำนำ	2
สารบัญ	3
องค์ประกอบของชุดกิจกรรมเกมฝึกทักษะคณิตศาสตร์	4
คำแนะนำสำหรับนักเรียน	5
สาระสำคัญ	6
ผลการเรียนรู้	6
แบบทดสอบก่อนเรียน	7
ใบความรู้	9
ชุดกิจกรรมเกมฝึกทักษะคณิตศาสตร์	16
แบบทดสอบหลังเรียน	24
เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน	26
เฉลยโจทย์คำถาม	27
บรรณานุกรม	31

องค์ประกอบของชุดกิจกรรมเกมฝึกทักษะคณิตศาสตร์

ชุดกิจกรรมเกมฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เป็นกิจกรรมเกมฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ในรูปแบบ เกมภาพปริศนาคณิตศาสตร์ ใช้ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนของรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค32202 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ซึ่งมีทั้งหมด 6 ชุด ได้แก่

- ชุดที่ 1 การสร้างจำนวนเชิงซ้อนและสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน
- ชุดที่ 2 รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน
- ชุดที่ 3 กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
- ชุดที่ 4 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว
- ชุดที่ 5 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน
- ชุดที่ 6 สมการพหุนาม

ซึ่งชุดกิจกรรมเล่มนี้ เป็นการจัดกิจกรรมเกมฝึกทักษะคณิตศาสตร์ของชุดที่ 1 การสร้างจำนวนเชิงซ้อนและสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวน มีองค์ประกอบของชุดกิจกรรม ดังนี้

1. แบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน
2. ใบความรู้
3. เกมภาพปริศนาคณิตศาสตร์
4. เฉลยภาพปริศนาคณิตศาสตร์
5. เฉลยโจทย์คำถาม
6. เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน



คำแนะนำสำหรับนักเรียน

1. ทำความเข้าใจกับสาระสำคัญ และผลการเรียนรู้ เพื่อเป็นเป้าหมายในการเรียนรู้และการฝึกปฏิบัติ
2. ทำแบบทดสอบก่อนเรียน
3. ศึกษาใบความรู้และกติกาในการเล่นกิจกรรมเกมภาพปริศนาคณิตศาสตร์ ให้เข้าใจ
4. เมื่อนักเรียนพบปัญหา หรือไม่เข้าใจกติกาการเล่นให้สอบถามครูผู้สอน
5. นักเรียนต้องทำกิจกรรมเกมฝึกทักษะคณิตศาสตร์จนจบ เพื่อวัดความสามารถด้านความรู้ ความเข้าใจ และด้านทักษะการคิดคำนวณ
6. ทำแบบทดสอบหลังเรียน
7. ให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบในการแก้โจทย์ปัญหา เพื่อทราบความก้าวหน้าของนักเรียนแต่ละคน
8. เวลาที่ใช้ในการฝึกปฏิบัติของกิจกรรมเกมฝึกทักษะคณิตศาสตร์ ชุดละ 2 ชั่วโมง



สาระสำคัญ

การสร้างจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อนประกอบด้วยจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ จำนวนเชิงซ้อนนำไปใช้หาคำตอบของพหุนามได้ทุกสมการ

สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

สมบัติของจำนวนเชิงซ้อนที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณ เรียกว่าสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

ผลการเรียนรู้

1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน
2. นำสมบัติต่างๆ เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน และการดำเนินการ ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้



แบบทดสอบก่อนเรียน

คำชี้แจง : ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. $(a,b)+(c,d)$ มีค่าเท่ากับข้อใด
 - ก. (ab,cd)
 - ข. (ac,bd)
 - ค. $(a+b,c+d)$
 - ง. $(a+c,b+d)$

2. อินเวอร์สการบวกของจำนวนเชิงซ้อน $2+3i$ คือข้อใด
 - ก. $2-3i$
 - ข. $2+3i$
 - ค. $-2-3i$
 - ง. $-2+3i$

3. $(a+bi)(a-bi)$ มีค่าเท่ากับข้อใด
 - ก. a^2+b^2
 - ข. a^2-b^2
 - ค. a^2+b^2i
 - ง. a^2-b^2i

4. $(a,b)\div(c,d)$ มีค่าเท่ากับข้อใด
 - ก. $(a,b)\div\left(\frac{c}{c^2+d^2},\frac{-d}{c^2+d^2}\right)$
 - ข. $\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$
 - ค. $\frac{(a,b)}{(d,c)}$
 - ง. $\left(\frac{ad+bc}{c^2+d^2}\right)$

5. $(1-i)^2+(1+i)^2$ มีค่าเท่ากับข้อใด
 - ก. 0
 - ข. 1
 - ค. i
 - ง. $2i$



6. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|z|=1$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $z^{-1} = \bar{z}$

(2) $|1-kz| = |\bar{z}-k|$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริงใดๆ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความ (1) และ (2) ถูกต้อง
 ข. ข้อความ (1) ถูกต้องเพียงข้อเดียว
 ค. ข้อความ (2) ถูกต้องเพียงข้อเดียว
 ง. ข้อความ (1) และ (2) ไม่ถูกต้อง
7. ถ้า $(5a, -2) = (-10, 4b)$ แล้ว ค่า a และ b มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $(-1, -2)$

ข. $(-2, -2)$

ค. $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$

ง. $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$

8. ถ้า $\frac{x+yi}{2-i} = 5+3i$ แล้ว ค่า x และ y มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $x=2, y=-1$

ข. $x=-1, y=2$

ค. $x=13, y=1$

ง. $x=1, y=13$

9. จำนวนเชิงซ้อนในข้อใดที่คูณกับ $\frac{-5}{34} - \frac{3i}{34}$ แล้วได้ผลลัพธ์เป็น 1

ก. $5+3i$

ข. $-5+3i$

ค. $5-3i$

ง. $-5-3i$

10. ถ้า $(3-i)(x+yi)+3i=3+2i$ แล้ว x มีค่าเท่าใด

ก. 4

ข. 3

ค. 2

ง. 1



ใบความรู้

สาระการเรียนรู้

การสร้างจำนวนเชิงซ้อน

ในระบบจำนวนจริง ไม่สามารถหาคำตอบของสมการ $x^2 = -1$ เพราะไม่มีจำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วได้ -1 จะเห็นว่าคำตอบของสมการ $x^2 = -1$ จะมี $x = \sqrt{-1}$ เป็นคำตอบด้วย จึงเรียกจำนวนชนิดนี้ว่า จำนวนจินตภาพ และสร้างระบบจำนวนขึ้นใหม่ เรียกว่า จำนวนเชิงซ้อน

● บทนิยาม จำนวนเชิงซ้อน คือ คู่อันดับ (a, b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และกำหนดการเท่ากัน การบวก และการคูณ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ (c, d) มีดังนี้

การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

$$(a, b) = (c, d) \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = c \text{ และ } b = d$$

การบวกจำนวนเชิงซ้อน

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

การคูณจำนวนเชิงซ้อน

$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

อาจแทน $(a, b) \times (c, d)$ ด้วย $(a, b)(c, d)$

● บทนิยาม สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = (a, b)$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง เรียก a ว่าส่วนจริง (real part) ของ z แทนด้วย $\text{Re}(z)$ เรียก b ว่าส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ z แทนด้วย $\text{Im}(z)$

- จำนวนจริง คือ จำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจินตภาพเป็นศูนย์
- จำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็นศูนย์ แต่ส่วนจินตภาพไม่เป็นศูนย์ เรียกว่า จำนวนจินตภาพแท้

จำนวนเชิงซ้อน (a, b) สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $a + bi$ เมื่อ $i = \sqrt{-1}$ และมีข้อตกลงว่า $i^2 = -1$



ข้อสังเกต :

(1) ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$i^{4n} = 1$$

$$i^{4n+1} = i$$

$$i^{4n+2} = -1$$

$$i^{4n+3} = -i$$

(2) การคูณจำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ กับ $c+di$ หาได้จาก

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

ตัวอย่างที่ 1 การเขียนจำนวนจินตภาพ

1. $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{3}i$

2. $\sqrt{-5} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{5}i$

3. $\sqrt{-7} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{7}i$

4. $\sqrt{-9} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $z_1 = 2+3i$ และ $z_2 = -1+5i$ จงหา

1. $z_1 + z_2$

2. $z_1 z_2$

วิธีทำ

1.
$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2+3i) + (-1+5i) \\ &= (2+(-1)) + (3i+5i) \\ &= 1+8i \end{aligned}$$

วิธีทำ

2. วิธีที่ 1

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2+3i)(-1+5i) \\ &= [(2)(-1) - (3)(5)] + [(2)(5) + (3)(-1)]i \\ &= (-2-15) + (10+(-3))i \\ &= -17+7i \end{aligned}$$

วิธีที่ 2

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2+3i)(-1+5i) \\ &= 2(-1) + 2(5i) + (3i)(-1) + (3i)(5i) \\ &= -2 + 10i - 3i + 15i^2 \\ &= -2 + 10i - 3i + 15(-1) \\ &= -2 + 10i - 3i - 15 \\ &= -17 + 7i \end{aligned}$$





ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ

1. i^{123}
2. $i^5 + i^6 + i^7 + i^8$

วิธีทำ

1. $i^{123} = i^{4(30)+3} = (1)(-i) = -i$
2. $i^5 + i^6 + i^7 + i^8 = i^{4(1)+1} + i^{4(1)+2} + i^{4(1)+3} + i^{4(2)}$
 $= i + (-1) + (-i) + 1$
 $= 0$

ข้อสังเกต :

สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} + i^{4n+3} = 0$

ตัวอย่างที่ 4 จงแสดงว่า $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} (a+bi)(a-bi) &= a^2 - abi + abi - (bi)^2 \\ &= a^2 - (bi)^2 \\ &= a^2 - b^2 i^2 \\ &= a^2 - b^2(-1) \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

สมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว จะได้ว่า

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ และ $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (สมบัติการสลับที่)
2. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ และ $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ (สมบัติการเปลี่ยนหมู่)
3. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (สมบัติการแจกแจง)





สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

นอกจากสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนที่เกี่ยวกับการบวกและการคูณแล้ว ยังมีสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนเพิ่มเติม ดังนี้

เอกลักษณ์และตัวผกผันการบวก

$(0,0)$ เป็นเอกลักษณ์การบวกของจำนวนเชิงซ้อน (a,b)

$$\therefore (a,b) + (0,0) = (a,b)$$

และ $(-a,-b)$ เป็นตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อน (a,b)

$$\therefore (a,b) + (-a,-b) = (0,0)$$

ข้อสังเกต :

ถ้า $z = a + bi$ ตัวผกผันการบวกของ z แทนด้วย $-z$ นั่นคือ $-z = -a - bi$

การลบจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม $z - w = z + (-w)$ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z, w ใดๆ

เอกลักษณ์และตัวผกผันการคูณ

$(1,0)$ เป็นเอกลักษณ์การคูณของจำนวนเชิงซ้อน (a,b)

$$\begin{aligned} \therefore (a,b) + (1,0) &= (a(1) - b(0), a(0) + b(1)) \\ &= (a - 0, 0 + b) \\ &= (a, b) \end{aligned}$$

และ $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$ เป็นตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อน (a,b)

แสดงให้เห็นจริงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \therefore (a + bi) \left(\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i \right) &= (a) \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) + (a) \left(\frac{-b}{a^2 + b^2} i \right) + (bi) \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) + (bi) \left(\frac{-b}{a^2 + b^2} i \right) \\ &= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} \right) - \left(\frac{abi}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{abi}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{-b^2 i^2}{a^2 + b^2} \right) \\ &= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} \right) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \\ &= 1 = 1 + 0i = (1,0) \end{aligned}$$





ข้อสังเกต : (1) ผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนใดๆ กับตัวผกผันจะเท่ากับเอกลักษณ์การคูณของจำนวนเชิงซ้อน

(2) ถ้า $z = a + bi$ ตัวผกผันการคูณของ z แทนด้วย z^{-1}

$$\text{นั่นคือ } z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \text{ หรือ } z^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

การหารจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม $z \div w = zw^{-1}$ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z, w ใดๆ

ซึ่ง $w \neq (0,0)$ และอาจเขียนแทน $z \div w$ ด้วย $\frac{z}{w}$

สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม ให้ $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะเรียกจำนวนเชิงซ้อน

$a - bi$ ว่าเป็น **สังยุค** (conjugate) ของ z และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ \bar{z}

นั่นคือ $\bar{\bar{z}} = a + bi = z$

สมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ z, z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

$$1. \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ และ } \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$2. \bar{\bar{z}} = z$$

$$3. \text{ถ้า } z \neq 0 \text{ แล้ว } \frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$$

$$4. \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$5. \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$6. \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$7. \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \text{ เมื่อ } z_2 \neq 0$$

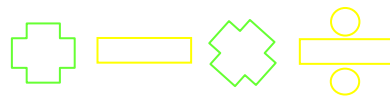
ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $z = 1 - 4i$ และ $w = -3 - 2i$

จะได้ว่า 1. $-z = -1 + 4i$

$$2. -w = 3 + 2i$$

$$\begin{aligned} 3. z - w &= z + (-w) \\ &= (1 - 4i) + (3 + 2i) \\ &= (1 + 3) + (-4i + 2i) \\ &= 4 - 2i \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}\text{หรือ } z - w &= (1 - 4i) - (-3 - 2i) \\ &= 1 - 4i + 3 + 2i \\ &= 4 - 2i\end{aligned}$$

$$4. \quad \bar{z} = 1 + 4i$$

$$5. \quad \bar{w} = -3 + 2i$$

$$6. \quad \frac{z}{w} = zw^{-1}$$

$$\begin{aligned}&= (1 - 4i) \left(\frac{-3 + 2i}{(-3)^2 + (-2)^2} \right) \\ &= \frac{(1 - 4i)(-3 + 2i)}{9 + 4} \\ &= \frac{-3 + 2i + 12i - 8i^2}{9 + 4} \\ &= \frac{-3 + 2i + 12i + 8}{9 + 4} \\ &= \frac{5 + 14i}{13}\end{aligned}$$

● การหารผลหารของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้สังยุค

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $\frac{1 - 4i}{-3 - 2i}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{1 - 4i}{-3 - 2i} &= \frac{(1 - 4i)(-3 + 2i)}{(-3 - 2i)(-3 + 2i)} \\ &= \frac{-3 + 2i + 12i + 8}{(-3)^2 + (-2)^2} \\ &= \frac{-3 + 8 + 2i + 12i}{9 + 4} \\ &= \frac{5 + 14i}{13}\end{aligned}$$

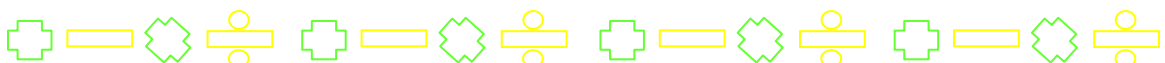
ตัวอย่างที่ 7 ถ้า $(3 - i)(x + yi) + 3i = 3 + 2i$ แล้ว x มีค่าเท่าใด

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(3 - i)(x + yi) + 3i &= 3 + 2i \\ (3 - i)(x + yi) &= 3 + 2i - 3i \\ (3 - i)(x + yi) &= 3 - i \\ (x + yi) &= \frac{3 - i}{3 - i} \\ x + yi &= 1 \\ x + yi &= 1 + 0i\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$x = 1$$





ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าของ $2iz + (5-i)(5+i) = 0$

วิธีทำ

$$2iz + (5-i)(5+i) = 0$$

$$2iz + (5^2 + 1^2) = 0$$

$$2iz + 26 = 0$$

$$2iz = -26$$

$$z = \frac{-26}{2i}$$

$$z = \frac{-13}{i}$$

$$z = \frac{(-13)(-i)}{(i)(-i)}$$

$$z = \frac{13i}{-i^2}$$

$$z = \frac{13i}{-(-1)}$$

$$z = 13i$$



ชุดกิจกรรมเกมฝึกทักษะคณิตศาสตร์

เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน :

ชุดที่ 1

การสร้างจำนวนเชิงซ้อนและสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน



เกมภาพปริศนาคณิตศาสตร์

วัตถุประสงค์ของกิจกรรม

ส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการสร้างจำนวนเชิงซ้อนและสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน มีการวางแผนการดำเนินงานได้อย่างรวดเร็วและถูกต้อง ฝึกการแก้ปัญหาและการทักษะการคิดคำนวณ และมีเจตคติที่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์





กติกากล่องเล่นเกม

1. ใช้เวลาในการเล่นเก็ลเกมภาพปริศนาคณิตศาสตร์ 30 นาที
2. ให้นักเรียนหยิบแผ่นภาพคำตอบ 14 แผ่น ที่เป็นลำดับตัวเลขคำตอบ ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ A – N จากนั้นให้คละแผ่นภาพคว่ำรูปภาพไว้
3. ให้นักเรียนหยิบแผ่นโจทย์คำถาม แผ่นตัวเลขคำตอบ แผ่นกระดาษคำตอบ และแผ่นวางตำแหน่งรูปภาพปริศนา
4. เริ่มทำโจทย์คำถามแล้วจับคู่กับแผ่นภาพคำตอบตามข้อ 2. ทีละข้อ โดยให้นักเรียนวางแผ่นภาพคำตอบลงบนแผ่นวางตำแหน่งภาพปริศนา โดยยังไม่ต้องพลิกรูปภาพ และให้เขียนตัวเลขคำตอบลงในกระดาษคำตอบด้วย เพื่อย้ำเตือนตัวเลขที่ได้เลือกไปแล้ว ทำโจทย์คำถามจนกระทั่งครบ 14 ข้อ
4. เมื่อหมดเวลา ให้นักเรียนหยิบแผ่นภาพคำตอบพลิกรูปภาพดูทีละแผ่นตามตำแหน่งที่วาง จากนั้นตรวจสอบความถูกต้องกับรูปภาพปริศนาต้นแบบ
5. ให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบและแก้ไขข้อบกพร่องในการแก้โจทย์ปัญหา และสรุปผลที่ได้จากการทำกิจกรรม

การประเมินผลกิจกรรม

นักเรียนแต่ละคน “ผ่าน” กิจกรรมนี้เมื่อผ่านเกณฑ์ในการประเมิน ตั้งแต่ 7 คะแนนขึ้นไป และมีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมด้วยความตั้งใจ ให้ความร่วมมือเป็นอย่างดี และทำกิจกรรมได้สำเร็จภายในเวลาที่กำหนด

เกณฑ์การประเมิน

คะแนนในการทำกิจกรรมครั้งนี้มีคะแนนเต็ม 14 คะแนน มีหลักเกณฑ์ ดังนี้

- | | |
|--|-----------------------|
| 1. วางแผ่นป้ายคำตอบถูกต้องตรงเวลาได้ครบ 14 แผ่น | ได้คะแนนเต็ม 14 คะแนน |
| 2. วางแผ่นป้ายคำตอบได้ไม่ครบแต่ถูกต้องตามตำแหน่ง | ได้ตำแหน่งละ 1 คะแนน |
| 3. วางแผ่นป้ายคำตอบไม่ถูกต้องเลย | ไม่มีคะแนน |



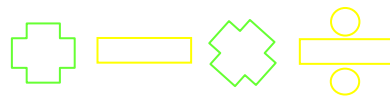
โจทย์คำถาม



คำชี้แจง : ให้นักเรียนจับคู่คำถามและคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงตัวเลือกเดียว

1. $(-i)^7 - i$ มีค่าเท่าใด
2. จงหาค่าของ $(1-2i)(1+2i)(3-2i)(3+2i)$
3. ถ้า $(3-i)(a+bi) - 5i = 3+2i$ แล้ว $15a+20b$ มีค่าเท่าใด
4. ถ้า $z = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$ แล้ว $z^2 + 1$ มีค่าเท่าใด
5. ถ้า $z_1 + z_2 = -18$ และ $z_1 - z_2 = 14i$ แล้ว z_1 มีค่าเท่าใด
6. จงหาค่า $\sqrt{-16} + \sqrt{-49}$
7. ค่าของ $(4-3i)(4+3i)$ มีค่าเท่าใด
8. i^{56} มีค่าเท่าใด
9. จำนวนเชิงซ้อนในข้อใดที่คูณกับ $\frac{-5}{34} - \frac{3i}{34}$ แล้วได้ผลลัพธ์เป็น 1
10. $i \div (1-i)$ เท่ากับจำนวนใด
11. $\frac{3}{2+i}$ มีค่าเท่าใด
12. $\frac{2-\sqrt{-64}}{3+\sqrt{-1}}$ มีค่าเท่าใด
13. $(3+2i)(2+3i)$ มีค่าเท่าใด
14. $\frac{i^4 + i^3 + i^2 + i + 1}{i}$ มีค่าเท่าใด





ตัวเลือกคำตอบ



A. $-9+7i$

B. $\frac{1}{2}(i-1)$

C. 0

D. $2\sqrt{6}i$

E. $\frac{6-3i}{5}$

F. $-i$

G. 1

H. $11i$

I. 65

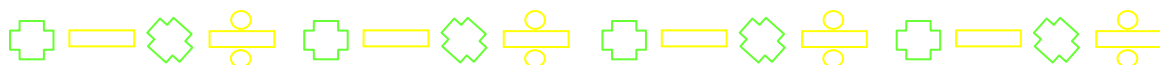
J. $\frac{-1-13i}{5}$

K. 51

L. $-5+3i$

M. $13i$

N. 25





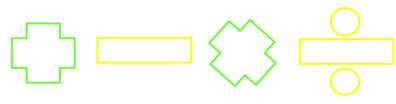
กระต่ายคำตอบ



คำชี้แจง : ให้นักเรียนจับคู่คำถามและคำตอบที่ถูกต้อง เพื่อนำไปวางในแผ่นตำแหน่งรูปภาพ

ข้อ	จับคู่คำตอบ	ข้อ	จับคู่คำตอบ
1		8	
2		9	
3		10	
4		11	
5		12	
6		13	
7		14	

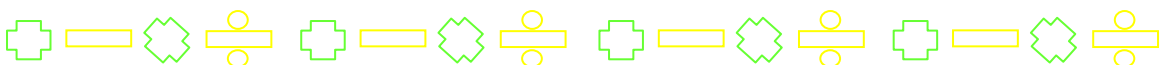




แผนวางตำแหน่งรูปภาพปริศนา



1.	8.
2.	9.
3.	10.
4.	11.
5.	12.
6.	13.
7.	14.





เฉลย



ข้อ	ภาพเฉลย	ข้อ	ภาพเฉลย
1. C		8. G	
2. I		9. L	
3. K		10. B	
4. D		11. E	
5. A		12. J	
6. H		13. M	
7. N		14. F	



เฉลยคำตอบ การวางรูปภาพปริศนา

C	G
I	L
K	B
D	E
A	J
H	M
N	F



แบบทดสอบหลังเรียน

คำชี้แจง : ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. $(a,b) + (c,d)$ มีค่าเท่ากับข้อใด
 - ก. (ab,cd)
 - ข. (ac,bd)
 - ค. $(a+b,c+d)$
 - ง. $(a+c,b+d)$

2. อินเวอร์สการบวกของจำนวนเชิงซ้อน $2+3i$ คือข้อใด
 - ก. $2-3i$
 - ข. $2+3i$
 - ค. $-2-3i$
 - ง. $-2+3i$

3. $(a+bi)(a-bi)$ มีค่าเท่ากับข้อใด
 - ก. $a^2 + b^2$
 - ข. $a^2 - b^2$
 - ค. $a^2 + b^2i$
 - ง. $a^2 - b^2i$

4. $(a,b) \div (c,d)$ มีค่าเท่ากับข้อใด
 - ก. $(a,b) \div \left(\frac{c}{c^2+d^2}, \frac{-d}{c^2+d^2} \right)$
 - ข. $\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right)$
 - ค. $\frac{(a,b)}{(d,c)}$
 - ง. $\left(\frac{ad+bc}{c^2+d^2} \right)$

5. $(1-i)^2 + (1+i)^2$ มีค่าเท่ากับข้อใด
 - ก. 0
 - ข. 1
 - ค. i
 - ง. $2i$



6. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|z|=1$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $z^{-1} = \bar{z}$

(2) $|1-kz| = |\bar{z}-k|$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริงใดๆ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ก. ข้อความ (1) และ (2) ถูกต้อง
 - ข. ข้อความ (1) ถูกต้องเพียงข้อเดียว
 - ค. ข้อความ (2) ถูกต้องเพียงข้อเดียว
 - ง. ข้อความ (1) และ (2) ไม่ถูกต้อง
7. ถ้า $(5a, -2) = (-10, 4b)$ แล้ว ค่า a และ b มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $(-1, -2)$

ข. $(-2, -2)$

ค. $(-2, -\frac{1}{2})$

ง. $(-\frac{1}{2}, -2)$

8. ถ้า $\frac{x+yi}{2-i} = 5+3i$ แล้ว ค่า x และ y มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $x=2, y=-1$

ข. $x=-1, y=2$

ค. $x=13, y=1$

ง. $x=1, y=13$

9. จำนวนเชิงซ้อนในข้อใดที่คูณกับ $\frac{-5}{34} - \frac{3i}{34}$ แล้วได้ผลลัพธ์เป็น 1

ก. $5+3i$

ข. $-5+3i$

ค. $5-3i$

ง. $-5-3i$

10. ถ้า $(3-i)(x+yi)+3i=3+2i$ แล้ว x มีค่าเท่าใด

ก. 4

ข. 3

ค. 2

ง. 1



เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน

1. ง. $(a+c, b+d)$
2. ค. $-2-3i$
3. ก. a^2+b^2
4. ข. $\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$
5. ก. 0
6. ก. ข้อความ (1) และ (2) ถูกต้อง
7. ค. $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$
8. ค. $x=13, y=1$
9. ข. $-5+3i$
10. ง. 1



เฉลยโจทย์คำถาม

1. $(-i)^7 - i$ มีค่าเท่าใด

ตอบ C. 0

วิธีทำ

$$\begin{aligned} (-i)^7 - i &= [(-i)^2 (-i)^2 (-i)^2 (-i)] - i \\ &= [(-1)(-1)(-1)(-i)] - i \\ &= (i) - i \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. จงหาค่าของ $(1-2i)(1+2i)(3-2i)(3+2i)$

ตอบ I. 65

วิธีทำ

$$\begin{aligned} (1-2i)(1+2i)(3-2i)(3+2i) &= (1^2 + 2^2)(3^2 + 2^2) \\ &= (1+4)(9+4) \\ &= (5)(13) \\ &= 65 \end{aligned}$$

3. ถ้า $(3-i)(a+bi) - 5i = 3+2i$ แล้ว $15a+20b$ มีค่าตรงกับข้อใด

ตอบ K. 51

วิธีทำ

$$\begin{aligned} (3-i)(a+bi) - 5i &= 3+2i \\ (3-i)(a+bi) &= 3+2i+5i \\ (3-i)(a+bi) &= 3+7i \\ a+bi &= \frac{3+7i}{3-i} \\ a+bi &= \frac{(3+7i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} \\ a+bi &= \frac{9+3i+21i-7}{3^2+1^2} \\ a+bi &= \frac{2+24i}{10} \\ a+bi &= \frac{1+12i}{5} \\ \therefore a &= \frac{1}{5}, b = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

ดังนั้น $15a+20b = 15\left(\frac{1}{5}\right) + 20\left(\frac{12}{5}\right) = 3(1) + 4(12) = 3+48 = 51$





4. ถ้า $z = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$ แล้ว $z^2 + 1$ มีค่าตรงกับข้อใด

ตอบ D. $2\sqrt{6}i$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} z^2 &= (\sqrt{2} + \sqrt{3}i)^2 \\ &= (\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{2})(\sqrt{3})i + (\sqrt{3})^2 \\ &= 2 + 2(\sqrt{6})i - 3 \\ &= -1 + 2\sqrt{6}i \end{aligned}$$

ดังนั้น $z^2 + 1 = -1 + 2\sqrt{6}i + 1 = 2\sqrt{6}i$

5. ถ้า $z_1 + z_2 = -18$ และ $z_1 - z_2 = 14i$ แล้ว z_1 มีค่าเท่าใด

ตอบ A. $-9 + 7i$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= -18 && \rightarrow (1) \\ z_1 - z_2 &= 14i && \rightarrow (2) \end{aligned}$$

นำ (1) + (2) จะได้ $2z_1 = -18 + 14i$

$$z_1 = \frac{-18 + 14i}{2}$$

ดังนั้น $z_1 = -9 + 7i$

6. จงหาค่า $\sqrt{-16} + \sqrt{-49}$

ตอบ H. $11i$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \sqrt{-16} + \sqrt{-49} &= \sqrt{16}i + \sqrt{49}i \\ &= 4i + 7i \\ &= 11i \end{aligned}$$

7. ค่าของ $(4 - 3i)(4 + 3i)$ ตรงกับข้อใด

ตอบ N. 25

วิธีทำ

$$\begin{aligned} (4 - 3i)(4 + 3i) &= 4^2 + 3^2 \\ &= 16 + 9 \\ &= 25 \end{aligned}$$



8. i^{56} มีค่าตรงกับข้อใด

ตอบ G. 1

วิธีทำ $i^{56} = i^{4(14)} = 1$

9. จำนวนเชิงซ้อนในข้อใดที่คูณกับ $\frac{-5}{34} - \frac{3i}{34}$ แล้วได้ผลลัพธ์เป็น 1

ตอบ L. $-5+3i$

วิธีทำ กำหนดให้ x เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

พิจารณา
$$\begin{aligned} \frac{-5}{34} - \frac{3i}{34} &= \frac{-5-3i}{9+25} \\ &= \frac{-5-3i}{(-5)^2+3^2} \\ &= \frac{-5-3i}{(-5+3i)(-5-3i)} \\ &= \frac{1}{-5+3i} \end{aligned}$$

และ ถ้าให้ $\left(\frac{1}{-5+3i}\right)x = 1$

นั่นคือ $x = -5+3i$

10. $i \div (1-i)$ เท่ากับจำนวนใดต่อไปนี้

ตอบ B. $\frac{1}{2}(i-1)$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} i \div (1-i) &= \frac{i}{1-i} \\ &= \frac{(i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{i-1}{1+1} \\ &= \frac{i-1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(i-1) \end{aligned}$$



11. $\frac{3}{2+i}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ตอบ E. $\frac{6-3i}{5}$

วิธีทำ
$$\frac{3}{2+i} = \frac{3(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$

$$= \frac{6-3i}{4+1}$$

$$= \frac{6-3i}{5}$$



12. $\frac{2-\sqrt{-64}}{3+\sqrt{-1}}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ตอบ J. $\frac{-1-13i}{5}$

วิธีทำ
$$\frac{2-\sqrt{-64}}{3+\sqrt{-1}} = \frac{2-\sqrt{64}i}{3+\sqrt{1}i}$$

$$= \frac{2-8i}{3+i}$$

$$= \frac{(2-8i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$

$$= \frac{6-2i-24i-8}{9+1}$$

$$= \frac{-2-26i}{10}$$

$$= \frac{-1-13i}{5}$$

13. $(3+2i)(2+3i)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ตอบ M. $13i$

วิธีทำ
$$(3+2i)(2+3i) = 6+9i+4i-6$$

$$= 13i$$

14. $\frac{i^4+i^3+i^2+i+1}{i}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ตอบ F. $-i$

วิธีทำ
$$\frac{i^4+i^3+i^2+i+1}{i} = \frac{1+(-i)+(-1)+i+1}{i}$$

$$= \frac{1}{i} = \frac{(1)(-i)}{(i)(-i)} = \frac{-i}{-(-1)}$$

$$= -i$$



บรรณานุกรม

กมล เอกไทยเจริญ. **คณิตศาสตร์ ม.5 เล่ม 4 ค 014.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์อมรการพิมพ์. 2521.

ชมรมคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษา. **The Epitome Maths Prolems.** 2539.

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.5.** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม่ค. ม.ป.ป.

_____ **CONDENSED MATHS 2.** กรุงเทพฯ : ชวนพิมพ์. 2539.

บริบูรณ์ สีมาชัย. **คณิตศาสตร์ประยุกต์ 7.** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เอมพันธ์. 2546.

พิพัฒน์พงศ์ ศรีวิศร. **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่ม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6.** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เดอะบุคส์. 2555

วิวัฒน์ อัสวานิชย์. **หลักคณิตศาสตร์ ม.ปลาย.** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แม่ค. 2536.

ศักดิ์สิน แก้วประจบ. **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม. 4-6. เล่ม 4.** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์พีบีซี. 2555.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์เล่ม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6. พิมพ์ครั้งที่ 2.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว. 2554.

สำราญ เต๋นอุดม. **คัมภีร์เก่งคณิต ม.4-5-6.** นนทบุรี : สำนักพิมพ์ Think Beyond A⁺. 2560.

สุชีพ งามเจริญ และ ไอศูรีย สุดประเสริฐ. **คณิตคิดเร็วทีละเรื่อง จำนวนเชิงซ้อน.** นนทบุรี : สำนักพิมพ์ ธรรมบัณฑิต. ม.ป.ป.

สุนทรี ภู่อัพทยากร. **คณิตศาสตร์ประยุกต์ 7.** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เอมพันธ์. 2550.

อเนก ทิรัญ. **คณิตศาสตร์ ฉบับรวม ม.4-5-6.** กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์ การพิมพ์. 2526.

M. A. Munem and D. J. Foulis. **College Algebra With Applications.** California : Worth Publishers, Inc. 1986.

Michael Sullivan. **College Algebra.** California : Dellen Publishing Company. 1987.

R. David Gustafson and Peter D. Frisk. **College Algebra Third Edition.** California : Books/Cole Publishing Company. 1986.

